

Jouni Kuitunen

## **Valon liikemäärä väliaineessa**

**Sähkötekniikan korkeakoulu**

Diplomityö, joka on jätetty opinnäytteenä tarkastettavaksi  
diplomi-insinöörin tutkintoa varten Espoossa 23.04.2018.

**Työn valvoja ja ohjaaja:**

Prof. Ilkka Tittonen

Tekijä: Jouni Kuitunen

Työn nimi: Valon liikemäärä väliaineessa

Päivämäärä: 23.04.2018

Kieli: Suomi

Sivumäärä: 6+64

Professuuri:

Työn valvoja ja ohjaaja: Prof. Ilkka Tittonen

Tämä diplomityö käsittelee valon liikemääräominaisuuksia väliaineessa ja tyhjiössä. Erityisesti keskitytään niin kutsutun Abraham-Minkowskin liikemääräristiriidan analysointiin, sekä ristiriidan ratkaisuksi ehdotetun massatiheysaaltoteorian käsitelyyn.

Työn alkuosa koostuu kirjallisuuskatsauksesta, jossa käydään läpi johdot valon liikemäärän keskeisimmille lausekkeille. Erityisesti keskitytään Maxwellin yhtälöistä saataviin liikemääräsuureisiin sekä niin kutsutun kvanttihypoteesin johtoon. Lisäksi esitellään Abraham-Minkowskin liikemääräristiriitana tunnettu ongelma, joka liittyy valon liikemäärän suuruuteen tämän kulkiessa eri taitekertoimisissa väliaineissa. Ristiriidan matemaattinen johto käydään läpi ja ongelmaa käsittelevien kokeiden koeasetelmia ja tuloksia tarkastellaan. Kirjallisuuskatsauksen lopuksi esitellään valon massa-aaltoteorioita, joita on esitetty ratkaisuksi Abraham-Minkowskin liikemääräristiriidalle.

Työn jälkimmäisessä osiossa esitellään kokeellisia mittaasetelmia aiemmin mainitun massa-aaltoteorian paikkansapitävyyden testaamiseksi. Useita eri vaihtoehtoisia koeasetelmia käydään läpi. Tämän jälkeen tarkastellaan tarkemmin ehdotettua koeasetelmaa, jossa valokuidun pintaan on valmistettu diffraktiivinen hila jonka venymien kautta ennustettuja massatiheysaaltoja pyritään havainnoimaan. Hilan muutosdynamiikan analysoimiseksi muodostetaan yksinkertaistettu matemaattinen malli, jonka pohjalta valmistettiin MATLAB-ohjelmointikielellä toteutettu simulaatio-ohjelma. Mallinnusosuuden lopuksi simulaattorin tuottamia tuloksia esitellään ja analysoidaan ja kokeen jatkokehitysmahdollisuuksia arvioidaan.

Avainsanat: Fotoniikka, liikemäärä, Abraham-Minkowskin liikemääräristiriita, massa-aaltoteoria, simulointi, diffraktio

Author: Jouni Kuitunen

Title: Momentum of light in the medium

Date: 23.04.2018

Language: Finnish

Number of pages: 6+64

Professorship:

Supervisor and advisor: Prof. Ilkka Tittonen

This master's thesis is about light momentum in a medium and in vacuum. The main emphasis is in the analysis of the so called Abraham-Minkowski controversy, and in the mass density wave theorem which is proposed to solve the controversy. The first part of the thesis is a literature part, in which the central theorems related to light momentum are reviewed. The main emphasis is on the momentum equations resulting from the Maxwell's equations, and in the derivation of the so called quantum hypothesis. In addition, the so called Abraham-Minkowski momentum controversy, which is related to the light momentum in a medium with a refractive index, is introduced. The mathematical basis of the problem is analysed and some of the experimental setups in which the controversy has been tested, are reviewed. At the end of the literature part mass density wave theories of light, which have been proposed as a solution to the controversy, are presented. At the latter part of the thesis experimental setups for testing the before mentioned mass density wave theorems are presented. Several alternative setups are reviewed. After this the setup in which a diffractive grating with time-dependent size is used to analyse the mass density wave, is analysed in detail. A model for analysis of the change dynamics of the grating was made, and used as a basis of a MATLAB-based simulation program. At the end of the modelling section, simulation results are presented and analysed and the possible continuation of the experiment is evaluated.

Keywords: Photonics, momentum, Abraham-Minkowski controversy, mass density wave theorem, simulation, diffraction

# Sisällysluettelo

Tiivistelmä	ii
Tiivistelmä (englanniksi)	iii
Sisällysluettelo	iv
Symbolit ja lyhenteet	v
<b>1 Johdanto</b>	<b>1</b>
<b>2 Valon liikemäärä tyhjiössä</b>	<b>2</b>
2.1 Liikemääräsuureiden johtaminen Maxwellin yhtälöistä . . . . .	2
2.2 Max Planck ja kvantittunut fotonienenergia . . . . .	5
<b>3 Valon liikemäärä väliaineessa</b>	<b>10</b>
3.1 Einsteinin AB-vakiot . . . . .	10
3.2 Abraham-Minkowskin liikemääräristiriita . . . . .	14
3.3 Valon liikemäärän mittaaminen väliaineessa . . . . .	21
3.4 Massa-aaltoteoria . . . . .	24
<b>4 Koeasetelma</b>	<b>27</b>
4.1 Mahdolliset mittausasetelmat MDW-ilmiön havaitsemiseksi . . . . .	27
4.2 Menetelmät ja mallit . . . . .	29
<b>5 Simulaatiotulokset</b>	<b>37</b>
5.1 Valopulssin eteneminen hilan läpi . . . . .	37
5.2 Venymien tasaantumisaallot . . . . .	44
<b>6 Yhteenveto</b>	<b>52</b>
<b>Viitteet</b>	<b>53</b>
<b>A Liite A</b>	<b>56</b>

# Symbolit ja lyhenteet

## Symbolit

$B$	Kimmomoduli
$\vec{B}$	Magneettivuon tiheys
$c$	Valonnopeus
$\vec{D}$	Sähkövuon tiheys
$\vec{E}$	Sähkökenttä
$e$	Sähköinen alkeisvaraus
$\vec{F}$	Voima
$\vec{f}$	Voimatiheys
$G$	Leikkausmoduli
$\vec{g}$	Liikemäärätiheys
$\vec{H}$	Magneettikenttä
$h$	Planckin vakio
$\hbar$	Redusoitu Planckin vakio
$\vec{J}$	Sähkövirran tiheys
$j$	Imaginääriluku
$K$	Säteilyintensiteetti
$k_B$	Boltzmannin vakio
$n$	Taitekerroin
$\vec{P}$	Liikemäärä
$\vec{p}$	Liikemäärätiheys
$q$	Sähköinen varaus
$\vec{r}$	Paikkavektori
$S$	Entropia
$\vec{S}$	Poyntingin vektori
$T$	Lämpötila Kelvineinä
$t$	Aika sekunteina
$T_A$	Abrahamin tensori
$T_M$	Minkowskin tensori
$U$	Kokonaisenergia
$u$	Energiatiheys
$V$	Sähköinen jännite
$\vec{v}$	Nopeus
$W$	Työ
$\delta_{ij}$	Kroneckerin deltafunktio
$\epsilon$	Kvantittunut energiamäärä
$\epsilon$	Sähköinen permittiivisyys
$\epsilon_0$	Tyhjiön permittiivisyys
$\epsilon_r$	Suhteellinen permittiivisyys
$\mu$	Magneettinen permeabilisuus
$\mu_0$	Tyhjiön permeabilisuus
$\mu_r$	Suhteellinen permeabilisuus
$\nu$	Taajuus
$\omega$	Kulmataajuus
$\Omega$	Leposäde
$\Phi$	Sähköinen lepovoima
$\Psi$	Magneettinen lepovoima
$\rho$	Sähkövaraustiheys
$\rho_a$	Atomitiheys
$\sigma$	Kaappausalue

## Lyhenteet

MDW	Mass density wave, massatiheysaalto
MP	Mass-polariton, massapolaritoni

# 1 Johdanto

Valo on haastanut ihmiskunnan ymmärrystä luonnosta todennäköisesti niin pitkään, kun aihetta on ylipäättään ymmärretty pohtia. Valolla on paljon samoja ominaisuuksia kuin muillakin arkisilla ilmiöillä, mutta samalla se sotii monin paikoin vastoin arkista ymmärrystä. Valo selkeästi liikkuu, sillä sen kulkureitin tukkimalla syntyy varjoja joihin valoa ei enää kulkeudukaan, mutta mikä tarkalleen ottaen valossa liikkuu? Liike jatkuu kovien ja läpinäkyvien asioiden lävitse sellaisenaan, ja vaikka tämän liikkeen pysäyttää varjostimelle, ei siihen kerry minkäänlaista kasaa valopartikkeleita, joita voitaisiin tarkemmin analysoida. Jopa liikkeen nopeuden määrittäminen on arkisilla mittalaitteilla käytännössä mahdotonta. Muun muassa Leonardo da Vinci toi esiin myös sen, ettei valo menetä lämpöään kulkiessaan kylmien nesteiden läpi, mikä myös osaltaan sotii arkijärkeä vastaan [1].

Tekniikan kehittyessä valon nopeuden mittaamisesta tuli mahdollista ja erinäisten kokeiden myötä myös ymmärrys valon itsensä luonteesta parani. Samalla ymmärrys valosta laajensi ymmärrystämme myös muista, jo enemmän tai vähemmän selvinä pidetyistä luonnonilmiöistä. Erityisesti niin kutsuttu aalto-hiukkas-dualismi osoitti, ettei kovien partikkeleiden liikkeen ja aaltomaisen kenttävärähtelyn välillä olekaan selkeästi määriteltävää rajaa. Tämä puolestaan on syventänyt aineeseen liittyvän fysiikan ymmärrystä huomattavasti ja luonut valtavia määriä uusia kysymyksiä luonnosta ympärillämme.

Tämä diplomityö käsittelee valon kvanttimekaanisia ominaisuuksia, keskittyen erityisesti sen liikemääräominaisuuksiin. Tarkastelu aloitetaan tyhjiössä vaikuttavan valon liikemäärälausekkeiden johdolla, aloittaen Maxwellin yhtälöistä ja päättyen Planckin kvanttimekaanisiin lausekkeisiin. Tämän jälkeen tarkastellaan valon ja aineen vuorovaikutusta Einsteinin pohdintojen valossa, ja esitellään aiheeseen liittyvän niin kutsutun Abraham-Minkowskin liikemääräristiriidan perusta ja matemaattinen tausta. Tämän lisäksi esitellään kyseisen ristiriidan ratkaisuyrityksinä suoritettuja kokeita ja ratkaisuehdotuksiksi esitettyjä uusia teorioita ja esitellään koeasetelmia näiden uusien teorioiden paikkansapitävyyden testaamiseksi. Erityisesti analysoidaan koeasetelmaa, jossa valokuidun pinnassa sijaitseva diffraktiivinen hila venyy valon työntäessä kuidun molekyylejä kasaan. Koeasetelmasta luodaan matemaattinen malli, jonka avulla ilmiötä simuloidaan. Lopuksi saatuja simulaatiotuloksia esitellään ja analysoidaan.

## 2 Valon liikemäärä tyhjiössä

Teoriat valoon liittyvästä liikemäärästä ulottuvat historiassa yllättävän kauas: jo 1500-luvun alkupuoliskolla havaittiin, että komeettojen hännät osoittavat aina pois-päin auringosta [2], eivätkä niinkään niiden kulkusuuntaa vastaan, ja 1600-luvulle tullessa Johannes Kepler esitti, että hännän suunta johtuisi auringon valon luomasta työntövoimasta [3, 4]. Vaikkeivat tuonaikaiset tähtitieteilijät päässeetkään täysin yhteisymmärrykseen häntien tarkasta syntymekanismista, oli havaintojen perusteella selvää että Auringolla oli vetovoimansa lisäksi jokin planeetoilta puuttuva työntävä voima, oli kysessä sitten eetterin itsensä liike, kuten Newton esitti, tai Keplerin ehdottama valon synnyttämä paine, joka työntäisi komeetasta materiaa [2]. Valon ja liikemäärän yhteys tuntuu jo esi-Newtonilaisen filosofis-luonnontieteellisen maailman-kuvan puitteissa jokseenkin intuitiiviselta. Lämmön ja liikkeen tiedettiin liittyvän toisiinsa oleellisesti, ja valon liittyvän lämpöön, joten tuntuisi luontevalta ajatella, että täten myös valo itsessään liittyisi liikkeeseen. Ongelmana teorioiden muodostamisessa lienee ollut lähinnä se, että luonnollisten valonlähteiden aiheuttamat voimat ovat niin pieniä, ettei niiden vaikutuksia voi yleensä paljaalla silmällä havaita. Todennäköisesti ilmiöiden yhteyttä onkin aika ajoin pohdittu, mutta arkimaailman havaintojen puitteissa teoriat on sivuutettu aina komeettojen häntien ongelman ilmenemiseen asti.

1800-luvun lopulla sähkömagnetiikan teoriat alkoivat kehittyä, ja niistä voitiin näyttää, että sähkömagneettisilla kentillä todellakin on oltava myös liikemääräominaisuuksia. Valoon liittyvän liikemäärän suuruutta yritettiin 1800-luvun lopulla mitata useaan otteeseen, mutta ongelmaksi muodostui juurikin mitattavan suureen pienuus: kokeiden suurimmaksi ongelmaksi muodostui jatkuvasti epävarmuus siitä, mikä osa mittalaitteen liikkeestä johtui valon itsensä liikemäärästä ja mikä lämpenemisestä johtuvista ilmvirtauksista testikammiossa [3, 5]. Tämän vuoksi vaikka teoreettinen pohja valon liikemäärän olemassaololle oli viimeistään Maxwellin kenttäteorioiden myötä selvä, tarkkoja koetuloksia saatiin vasta 1900-luvun alun kehittyneempien tyhjiötekniikkojen myötä. Myöhemmin kvanttivallankumouksen myötä ymmärrys valon luonteesta ja erityisesti liikemäärästä ja energiasta syventyi entisestään ja nykyään yksittäisen fotonin liikemäärän määrittävä Planckin vakio  $h$  on yksi kokeellisesti tarkimmin määritetyistä luonnonvakioista [6].

Tässä luvussa käydään lyhyesti läpi johdot valon liikemäärälausekkeille tyhjiössä, ja esitellään malleihin liittyvää historiallista taustaa. Erityisesti keskitytään niin kutsuttuun Poyntingin teoreemaan ja tämän johdon takana vaikuttaviin periaatteisiin. Lisäksi käydään läpi Max Planckin johtama malli valon kvanttittumiselle, ja lopuksi tulokset yhdistetään yhdeksi kokonaisuudeksi.

### 2.1 Liikemääräsuureiden johtaminen Maxwellin yhtälöistä

Lausekkeet valon liikemäärätiheydelle saatiin johdettua James Clerk Maxwellin muotoilemista kenttäyhtälöistä (1) jo huomattavasti ennen modernien kvanttiteorioiden kehittymistä. Yksi merkittävimmistä toimijoista aiheen parissa oli John Henry Poynting, jonka mukaan nimetty Poyntingin teoreema liittää yhteen Maxwellin kenttäsuu-



reet ja näihin liittyvät energiasuureet, ja sen johto löytyy useista sähkömagneetiikan oppikirjoista. Käyn näistä lyhyesti läpi lähteessä [7] esitetyn tavan, joskin korvaten siinä käytetyt Maxwellin yhtälöiden Gaussin yksiköissä esitettyt muodot niiden kaavassa (1) esitetyillä SI-järjestelmän mukaisilla vastineilla, ja selventäen joitakin laskujen välivaiheita nämä auki kirjoittamalla. Maxwellin yhtälöt sähkökentälle  $\bar{\mathbf{E}}$ , sähkövuon tiheydelle  $\bar{\mathbf{D}}$ , sähkövirran tiheydelle  $\bar{\mathbf{J}}$ , sähkövaraustiheydelle  $\rho$ , magneettikentälle  $\bar{\mathbf{H}}$  ja magneettivuon tiheydelle  $\bar{\mathbf{B}}$  ovat SI-yksiköissä

$$\begin{aligned}\nabla \times \bar{\mathbf{E}} &= -\frac{\partial \bar{\mathbf{B}}}{\partial t} \\ \nabla \times \bar{\mathbf{H}} &= \bar{\mathbf{J}} + \frac{\partial \bar{\mathbf{D}}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \bar{\mathbf{D}} &= \rho \\ \nabla \cdot \bar{\mathbf{B}} &= 0\end{aligned}\tag{1}$$

Lisäksi kokeellisesti tiedetään, että sähkömagneettisessa kentässä nopeudella  $\bar{\mathbf{v}}$  liikkuvaan varaukseen  $q$  vaikuttava voima  $\bar{\mathbf{F}}$  on Lorentzin voimana tunnettu

$$\bar{\mathbf{F}} = q(\bar{\mathbf{E}} + \bar{\mathbf{v}} \times \bar{\mathbf{B}}).\tag{2}$$

Tästä saadaan johdettua kentän hiukkaseen tekemän työn  $W$  muutosnopeus:

$$\frac{dW}{dt} = \bar{\mathbf{F}} \cdot \bar{\mathbf{v}} = q(\bar{\mathbf{E}} + \bar{\mathbf{v}} \times \bar{\mathbf{B}}) \cdot \bar{\mathbf{v}} = q\bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\mathbf{E}}.\tag{3}$$

Mielivaltaisen kokoisessa tilavuudessa  $V$  pistevaraus korvataan tilavuuden jatkuvalla varaustiheydellä  $\rho$  ja lauseke saadaan integraalimuotoon

$$\frac{dW_V}{dt} = \int_V \rho \bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\mathbf{E}} \, d^3x = \int_V \bar{\mathbf{J}} \cdot \bar{\mathbf{E}} \, d^3x.\tag{4}$$

Kaavan (4) integrandi voidaan (1.2) avulla kirjoittaa uudelleen muotoon

$$\bar{\mathbf{J}} \cdot \bar{\mathbf{E}} = \bar{\mathbf{E}} \cdot (\nabla \times \bar{\mathbf{H}}) - \bar{\mathbf{E}} \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{D}}}{\partial t},\tag{5}$$

josta edelleen vektori-identiteetillä  $\nabla \cdot (\bar{\mathbf{E}} \times \bar{\mathbf{H}}) = \bar{\mathbf{H}} \cdot (\nabla \times \bar{\mathbf{E}}) - \bar{\mathbf{E}} \cdot (\nabla \times \bar{\mathbf{H}})$ :

$$\bar{\mathbf{J}} \cdot \bar{\mathbf{E}} = -\nabla \cdot (\bar{\mathbf{E}} \times \bar{\mathbf{H}}) + \bar{\mathbf{H}} \cdot (\nabla \times \bar{\mathbf{E}}) - \bar{\mathbf{E}} \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{D}}}{\partial t}.\tag{6}$$

Tämä saadaan edelleen (1.1) avulla muotoon

$$\bar{\mathbf{J}} \cdot \bar{\mathbf{E}} = -[\nabla \cdot (\bar{\mathbf{E}} \times \bar{\mathbf{H}}) + \bar{\mathbf{H}} \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{B}}}{\partial t} + \bar{\mathbf{E}} \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{D}}}{\partial t}]\tag{7}$$

Tyhjiössä, ja lineaarisissa väliaineissa yleisestikin, vuo- ja kenttävektoreiden välillä on materiaaliparametrien kautta yhteys

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{D}} &= \varepsilon \bar{\mathbf{E}} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \bar{\mathbf{E}} \\ \bar{\mathbf{B}} &= \mu \bar{\mathbf{H}} = \mu_r \mu_0 \bar{\mathbf{H}},\end{aligned}\tag{8}$$

missä  $\varepsilon$  on väliaineen permittiivisyys ja  $\mu$  permeabilisuus, jotka ovat edelleen jaettavissa tyhjiön permittiivisyyteen  $\varepsilon_0$ , tyhjiön permeabilisuuteen  $\mu_0$  ja suhteellisiin permittiivisyyksiin ja permeabilisuuksiin  $\varepsilon_r$  ja  $\mu_r$ . Tyhjiössä  $\varepsilon_r = \mu_r = 1$ . Permittiivisyys ja permeabilisuus liittyvät määritelmän mukaan suoraan valon nopeuteen  $c$  kaavan (9) kautta siten, että

$$c^2 = \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0}. \quad (9)$$

Sähkömagneettisen kentän kokonaisenergiatiheys  $u$  puolestaan on summa sähkö- ja magneettikenttien energioista, eli

$$u = \frac{1}{2}(\bar{\mathbf{E}} \cdot \bar{\mathbf{D}} + \bar{\mathbf{H}} \cdot \bar{\mathbf{B}}). \quad (10)$$

Tämän energiatiheyden aikaderivaatalle saadaan kaavan (8) mukaisessa väliaineessa suoralla laskulla kaavan (11) muoto.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \bar{\mathbf{E}} \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{D}}}{\partial t} + \bar{\mathbf{H}} \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{B}}}{\partial t}. \quad (11)$$

Täten kaavat (4) ja (7) voidaan yhdistää ja kirjoittaa kaavan (12) muotoon.

$$\frac{dW_V}{dt} = - \int_V [\nabla \cdot (\bar{\mathbf{E}} \times \bar{\mathbf{H}}) + \frac{\partial u}{\partial t}] d^3x. \quad (12)$$

Koska integroitava tilavuus  $V$  on mielivaltainen, voidaan (12) yleistää integraalimuodon ulkopuolelle ja kirjoittaa toisessa, havainnollisemmassa muodossa

$$-\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla \cdot \bar{\mathbf{S}} + \frac{dW}{dt} = \nabla \cdot \bar{\mathbf{S}} + \bar{\mathbf{J}} \cdot \bar{\mathbf{E}}, \quad (13)$$

$$\bar{\mathbf{S}} = \bar{\mathbf{E}} \times \bar{\mathbf{H}}.$$

$\bar{\mathbf{E}} \times \bar{\mathbf{H}}$ -termin lyhennysmerkintää  $\bar{\mathbf{S}}$  kutsutaan Poyntingin vektoriksi. Saatu tulos (13) tunnetaan Poyntingin teoreemana, ja se on ymmärrettävissä seuraavasti: systeemin sisällä olevan energiatiheyden  $u$  muutos on suoraan summa sieltä ulos virtaavasta säteilystä  $\nabla \cdot \bar{\mathbf{S}}$ , sekä sen sisällä tapahtuvasta varausten liike-energian muutoksesta  $\bar{\mathbf{J}} \cdot \bar{\mathbf{E}}$ . Teoreemalla on keskeinen rooli erityisesti sähkömekaniikassa, mutta sillä on suuri merkitys myös valon itsensä tulkittamisessa. Teoreema nimittäin liittää valon virtaan itseensä energiatiheyden muutoksen, myös niissä tapauksissa joissa varauksia ei ole eli  $\bar{\mathbf{J}} \cdot \bar{\mathbf{E}} = 0$ .

Vielä havainnollisempi muoto säteilyn ja liikkeen yhteydestä saadaan yhdistämällä Lorentzin voima (2) klassiseen Newtonin mekaniikkaan. Newtonin toisen lain mukaan nettovoima vastaa liikemäärän  $\bar{\mathbf{P}}$  aikamuutosta, eli (2) avulla mielivaltaisessa tilavuudessa  $V$  varaustiheydellä  $\rho$  ilmaistuna:

$$\frac{d\bar{\mathbf{P}}}{dt} = \int_V \bar{\mathbf{F}} d^3x = \int_V \rho \bar{\mathbf{E}} + \rho \bar{\mathbf{v}} \times \bar{\mathbf{B}} d^3x = \int_V \rho \bar{\mathbf{E}} + \bar{\mathbf{J}} \times \bar{\mathbf{B}} d^3x. \quad (14)$$

Tähän voidaan yhdistää (1.2), (1.3) sekä (8), jolloin integrandille saadaan

$$\begin{aligned}\rho\bar{\mathbf{E}} + \bar{\mathbf{J}} \times \bar{\mathbf{B}} &= \varepsilon\bar{\mathbf{E}}(\nabla \cdot \bar{\mathbf{E}}) + (\nabla \times \bar{\mathbf{H}}) \times \bar{\mathbf{B}} - \frac{\partial \bar{\mathbf{D}}}{\partial t} \times \bar{\mathbf{B}} \\ &= \varepsilon\bar{\mathbf{E}}(\nabla \cdot \bar{\mathbf{E}}) - \frac{1}{\mu}\bar{\mathbf{B}} \times (\nabla \times \bar{\mathbf{B}}) + \varepsilon\bar{\mathbf{B}} \times \frac{\partial \bar{\mathbf{E}}}{\partial t}.\end{aligned}\quad (15)$$

Ja koska normaalien derivointisääntöjen mukaisesti  $\frac{\partial \bar{\mathbf{E}} \times \bar{\mathbf{B}}}{\partial t} = \frac{\partial \bar{\mathbf{E}}}{\partial t} \times \bar{\mathbf{B}} + \bar{\mathbf{E}} \times \frac{\partial \bar{\mathbf{B}}}{\partial t}$ , voidaan kaavan (1.1) avulla lauseketta muokata viimeisen termin osalta muotoon

$$\rho\bar{\mathbf{E}} + \bar{\mathbf{J}} \times \bar{\mathbf{B}} = \varepsilon\bar{\mathbf{E}}(\nabla \cdot \bar{\mathbf{E}}) - \frac{1}{\mu}\bar{\mathbf{B}} \times (\nabla \times \bar{\mathbf{B}}) - \varepsilon\bar{\mathbf{E}} \times (\nabla \times \bar{\mathbf{E}}) - \varepsilon \frac{\partial}{\partial t}(\bar{\mathbf{E}} \times \bar{\mathbf{B}}). \quad (16)$$

Täten kaavan (14) liikemäärälausekkeesta saadaan lineaarisuusehdon (8.2) avulla kaavan (17) esitysmuoto.

$$\frac{d\bar{\mathbf{P}}}{dt} = \int_V \left[ \varepsilon\bar{\mathbf{E}}(\nabla \cdot \bar{\mathbf{E}}) - \frac{1}{\mu}\bar{\mathbf{B}} \times (\nabla \times \bar{\mathbf{B}}) - \varepsilon\bar{\mathbf{E}} \times (\nabla \times \bar{\mathbf{E}}) \right] d^3\mathbf{x} - \mu\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \int_V \bar{\mathbf{S}} d^3\mathbf{x}. \quad (17)$$

Toisin sanottuna, systeemin nettoliikemäärän  $\bar{\mathbf{P}}$  aikakehitys riippuu ajasta riippumattomasta suureesta sekä Poyntingin vektorin  $\bar{\mathbf{S}}$ , eli kappaleesta tulevan säteilyn, aikamuutoksesta. Täten integraaleista jälkimmäinen on tulkittavissa eräänlaiseksi tilavuuden sisällä vaikuttavan sähkömagneettisen kentän itsensä liikemääräksi. Koska tilavuus  $V$  on jälleen mielivaltainen, ovat tulokset yleistettävissä integraalimuodon ulkopuolellekin. Tyhjiössä sähkömagneettisen kentän liikemäärätiheydelle  $\bar{\mathbf{g}}_0$  voidaan siis kirjoittaa yhdessä kaavan (9) avulla

$$\bar{\mathbf{g}}_0 = \mu_0\varepsilon_0(\bar{\mathbf{E}} \times \bar{\mathbf{H}}) = \frac{\bar{\mathbf{S}}}{c^2} \quad (18)$$

Tulos liittyy elegantisti yhteen valon virtausta kuvaavan Poyntingin vektorin  $\bar{\mathbf{S}}$ , sen nopeuden  $c$  ja ilmiöön liittyvän liikemäärätiheyden  $\bar{\mathbf{g}}_0$ . Nykyfysiikan valossa teoria on mielenkiintoinen juurikin liikemäärätiheyden takia: koko virtaavan kentän kuvaaminen yksittäisenä liikemääräsuureena  $\bar{\mathbf{P}}$  ei ole mielekäs, vaan ilmiö hahmottuu nimenomaan tilavuudessa vaikuttavan liikemäärätiheyden kautta. Kvanttimekaniikan kautta syntynyt fotonimalli valosta ja erityisesti modernit yksittäisfotonilähteet ovat muokanneet käsitystä sähkömagneettisiin kenttiin liittyvistä liikemääräistä jossain määrin, mutta lopulta modernissakin fysiikassa valon liikemäärän avaruudellinen jakautuminen on keskeinen käsite.

## 2.2 Max Planck ja kvantittunut fotonienenergia

1800-luvun loppupuolelle mennessä Maxwellin yhtälöistä (1) saatiin yhdessä termodynamiikan peruslakien kanssa johdettua niin kutsutun mustan kappaleen säteilemän säteilyn spektrin lauseke. Musta kappale on idealisoitu käsite kammiosta, joka pysyy jatkuvasti samassa lämpötilassa, absorboi kaiken siihen ulkoapäin tulevan säteilyn, ja säteilee itse tuottamansa säteilyn täysin ulospäin sitä itse absorboimatta. Tämän

peruslaeista johdetun, niin kutsutun Wienin siirtymälain, taajuusmuotoinen esitys on kuvattu kaavassa (19) [8].

$$u \, d\nu = \frac{T^5 c^2}{\nu^2} \psi\left(\frac{T}{\nu}\right) d\nu, \quad (19)$$

missä  $u \, d\nu$  on kammiossa vaikuttavan säteilyn energiatiheys taajuusvälillä  $\nu, \nu + d\nu$ ,  $T$  kappaleen lämpötila,  $c$  valon nopeus ja  $\psi$  toistaiseksi määrittelemättömän mallinen funktio. Osoittautui [9], että käytettäessä klassisen termodynamiikan kannalta keskeistä ekvipartitioteoreemaa kaava (19) saa välttämättä niin kutsutun Rayleigh-Jeansin muodon

$$u_{\text{RJ}} \, d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} k_B T \, d\nu, \quad (20)$$

missä  $k_B$  on niin kutsuttu Boltzmannin vakio. Malli toimii tarkasti matalilla taajuuksilla, mutta kappaleen säteilemälle kokonaisenergialle  $U_{\text{tot}}$  saadaan koko taajuusalueen yli integroimalla

$$U_{\text{tot}} = \int_0^\infty u_{\text{RJ}} \, d\nu \rightarrow \infty \quad \forall T > 0, \quad (21)$$

mikä on tuloksena selvästikin epäfysikaalinen. Tilanne oli tiedeyhteisölle mitä epä-mukavin, sillä mallin sai johdettua suoraan Maxwellin kenttäyhtälöistä ja termodynamiikan perussäännöistä, joita pidettiin yksinä modernin fysiikan kulmakivistä. Tilanne tunnetaankin nykyään nimellä ultraviolettikatastrofi. Vuoden 1901 julkaisussaan Max Planck lähti mallintamaan ultraviolettikatastrofin ongelmaa uudesta näkökulmasta: hän päätti mallissaan jakaa säteilykammion seinämät useiksi erillisiksi säteilylähteiksi, joista jokainen tuottaisi oman energiaosuutensa kokonaiskenttään [8]. Tällöin voitaisiin käyttää termodynamiikasta tuttuja niin kutsuttuja suurten lukujen lakeja, hyppäämättä suoraan jatkuvien suureiden käsittelyyn. Ratkaisu on perusteltu, sillä käsiteltävä ongelma kuitenkin oli paitsi sähkö-, myös termodynaaminen. Toistan tässä lyhyesti Planckin lähteessä [8] esittämän johdon nykyään jo lähes itsestäänselvyytinä pidettävälle energian kvantittumismallille.

Planck lähestyi säteilyongelmaa kappaleen entropian kautta. Mikäli kammion seinämät koostuisivat  $N \in \mathbb{N}$  kappaleesta erillisiä resonaattoreita, eli säteilylähteitä, voitaisiin systeemin kokonaisenergialle  $U_N$  kirjoittaa

$$U_N = NU, \quad (22)$$

missä  $U$  voidaan ajatella eräänlaisena keskivertona energiana yksittäiselle resonaattorille. Vastaavasti kokonaisentropialle  $S_N$ , eli eräänlaiselle kenttien vaiheiden jakautuneisuudelle, voidaan kirjoittaa yksittäisen resonaattorin entropian  $S$  kautta

$$S_N = NS. \quad (23)$$

Samaan tapaan Planck päätti jakaa kaavan (22) kokonaisenergian  $P \in \mathbb{N}$  erilliseen osaan, joista kunkin suuruus olisi  $\epsilon$ :

$$U_N = P\epsilon. \quad (24)$$

Tästä päästäisiin tarvittaessa helposti jatkuviin suureisiin viemällä  $P \rightarrow \infty$  ja  $\epsilon \rightarrow 0$  sopivilla nopeuksilla, siten että kokonaisenergia pysyisi positiivisena mutta äärellisenä. Termodynaamisen systeemin kokonaisentropia voidaan tunnetusti kirjoittaa kaavan (25) muotoon.

$$S_N = k_B \log W + \text{vakio}, \quad (25)$$

missä  $W$  todennäköisyys sille, että  $N$  resonaattoria tuottavat yhdessä kokonaisenergian  $U_N$ . Kombinatoriikan perussääntöjen mukaan  $P$  energiaosaa voidaan jakaa  $N$  resonaattorin kesken  $R$  eri tavalla

$$R = \frac{(N + P - 1)!}{(N - 1)!P!}, \quad (26)$$

josta käyttäen suurten lukujen approksimaatiota  $N! \approx N^N$  saadaan

$$R \approx \frac{(N + P)^{(N+P)}}{N^N P^P}. \quad (27)$$

Koska  $W \sim R$ , voidaan sopivalla vakionvalinnalla kaava (25) kirjoittaa

$$S_N = k_B \log R = k_B [(N + P) \log(N + P) - N \log(N) - P \log(P)]. \quad (28)$$

Kaavojen (22) ja (24) mukaan  $P$  voidaan ilmaista  $N$  ja  $U$  avulla, ja (28) saa muodon

$$S_N = k_B \log R = k_B N \left[ \left(1 + \frac{U}{\epsilon}\right) \log\left(1 + \frac{U}{\epsilon}\right) - \frac{U}{\epsilon} \log\left(\frac{U}{\epsilon}\right) \right] \quad (29)$$

ja yksittäisen resonaattorin entropia on (23) mukaisesti

$$S = \frac{S_N}{N} = k_B \left[ \left(1 + \frac{U}{\epsilon}\right) \log\left(1 + \frac{U}{\epsilon}\right) - \frac{U}{\epsilon} \log\left(\frac{U}{\epsilon}\right) \right]. \quad (30)$$

Kaavan (19) spektrienergiasta puolestaan saadaan niin kutsuttua Kirchoff-Clausiuksen lakia käyttäen johdettua muoto

$$u = \frac{\nu^3}{c^3} f\left(\frac{T}{\nu}\right), \quad (31)$$

missä  $f$  on  $\psi$  kaltainen, tarkemmin määrittelemätön funktio. Energiatiheys  $u$  saadaan kytkettyä yksittäisen resonaattorin kokonaisenergiaan  $U$  tämän säteilyintensiteetin  $K$  avulla:

$$K = \frac{\nu^2}{c^2} U \quad (32)$$

$$u = \frac{8\pi}{c} K = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} U,$$

jolloin (31) saadaan  $U$  avulla lausuttuun muotoon

$$U = \frac{c^3}{8\pi\nu^2} u = \frac{c^3}{8\pi\nu^2} \frac{\nu^3}{c^3} f\left(\frac{T}{\nu}\right) = \nu f\left(\frac{T}{\nu}\right), \quad (33)$$

missä vakio-osuus  $8\pi$  on sisällytetty funktioon  $f$ . Muuttujien  $U$  ja  $T$  paikkoja voidaan vaihtaa, ja saadaan

$$T = \nu f\left(\frac{U}{\nu}\right). \quad (34)$$

Toisaalta lämpötila on termodynaamisen määritelmänsä mukaan

$$\frac{dS}{dU} = \frac{1}{T} = \frac{1}{\nu} f\left(\frac{U}{\nu}\right), \quad (35)$$

josta edelleen integroimalla saadaan entropia

$$S = f\left(\frac{U}{\nu}\right). \quad (36)$$

Vertaamalla kaavoja (30) ja (36) havaitaan, että energiakvantin  $\epsilon$  ja taajuuden  $\nu$  välillä on oltava lineaarinen yhteys, eli

$$\epsilon = h\nu \quad (37)$$

jollain vakiolla  $h$ . Tällöin yhdistämällä (30), (35) ja (37), saadaan

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} &= \frac{d}{dU} \left\{ k_B \left[ \left(1 + \frac{U}{h\nu}\right) \log\left(1 + \frac{U}{h\nu}\right) - \frac{U}{h\nu} \log\left(\frac{U}{h\nu}\right) \right] \right\} \\ &= \frac{k_B}{h\nu} \log\left(1 + \frac{U}{h\nu}\right) \end{aligned} \quad (38)$$

ja josta edelleen energia  $U$  normaleja laskusääntöjä käyttäen:

$$U = \frac{h\nu}{e^{h\nu/k_B T} - 1}. \quad (39)$$

Tämä voidaan kaavan (32) avulla muuntaa energiatiheydeksi, ja saadaan

$$u = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{h\nu/k_B T} - 1}, \quad (40)$$

mikä antaa yli koko taajuusalueen integroituna äärellisen tuloksen, joka sopii mitauksista saatavaan dataan. Sekä  $k_B$  että  $h$  voidaan laskea kokeellisista tuloksista, ja nykyään niiden arvot tunnetaan hyvinkin tarkkaan.

Planckin paperissa jopa merkityksellisempää kuin kaavan (40) mukainen ratkaisu mustan kappaleen säteilyn ongelmaan, on kaavan (24) fysikaalinen tulkinta: yksittäisinä laskettavien energiaosien  $\epsilon$  suuruus ei painukaan nollaan, kuten jatkuvan suureen tapauksessa kävisi, vaan se saa hyvin määritellyn arvon  $\epsilon = h\nu$ . Ja edelleen, säteilyn kokonaisenergia on äärellinen, kokonaislukumääräinen monikerta näitä energiaosia. Säteilystä oleva energia ei siis olekaan jatkuva suure, vaan *kvantittunut*  $h\nu$  kokosiin osiin. Tämä oli täysin vastoin siihenastisen fysiikan perusolettamuksia ja siitä syntyi nopeasti täysin uusi fysiikan haara, kvanttimekaniikka.

Tämä valokvantin, eli fotonin, kaavan (37) mukainen energiamäärä voidaan yhdistää Poyntingin esittämiin lausekkeisiin, kuten esimerkiksi lähteessä [4] on tehty.

Maxwellin yhtälöille (1) saadaan useimmissa tapauksissa niin kutsuttu aikaharmoninen ratkaisu, jolle pätee

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} \bar{\mathbf{E}} &= -j\omega \bar{\mathbf{E}} \\ \frac{\partial}{\partial t} \bar{\mathbf{B}} &= -j\omega \bar{\mathbf{B}} \\ \bar{\mathbf{E}}, \bar{\mathbf{B}} &\perp \bar{\mathbf{k}},\end{aligned}\tag{41}$$

missä  $\bar{\mathbf{k}}$  on valon etenemissuuntaa kuvaava vektori,  $\omega = 2\pi\nu$  ja  $j^2 = -1$ . Toisin sanottuna sekä sähkö- että magneettikenttä värähtelevät ajan suhteen sinimuotoisesti, ja ne ovat avaruudessa keskenään samassa tasossa, kumpikin kohtisuorassa aallon etenemissuuntaan nähden. Näistä ominaisuuksista saadaan suoraan johdettua itseisarvovastaavuudet

$$\begin{aligned}|\bar{\mathbf{B}}| &= \sqrt{\mu\varepsilon} |\bar{\mathbf{E}}| \\ |\bar{\mathbf{E}} \times \bar{\mathbf{B}}| &= \sqrt{\mu\varepsilon} |\bar{\mathbf{E}}|^2.\end{aligned}\tag{42}$$

Tällöin liikemäärätiheyden itseisarvolle saadaan tyhjiössä kaavoista (8.2), (18) ja (42)

$$|\bar{\mathbf{g}}_0| = \mu_0\varepsilon_0 |\bar{\mathbf{E}} \times \bar{\mathbf{H}}| = \varepsilon_0 |\bar{\mathbf{E}} \times \bar{\mathbf{B}}| = \varepsilon_0 \sqrt{\mu_0\varepsilon_0} |\bar{\mathbf{E}}|^2 = \frac{\varepsilon_0}{c} |\bar{\mathbf{E}}|^2\tag{43}$$

ja vastaavasti kaavan (10) energiatiheydelle

$$u = \frac{1}{2}(\varepsilon_0 |\bar{\mathbf{E}}|^2 + \frac{1}{\mu_0} |\bar{\mathbf{B}}|^2) = \frac{1}{2}(\varepsilon_0 |\bar{\mathbf{E}}|^2 + \frac{\mu_0\varepsilon_0}{\mu_0} |\bar{\mathbf{E}}|^2) = \varepsilon_0 |\bar{\mathbf{E}}|^2.\tag{44}$$

Kvanttiteorioiden perusteella liikemäärätiheys  $\bar{\mathbf{g}}_0$  voidaan tulkita yksittäisen fotonin kannalta suoraan tämän omaksi liikemääräksi, ja vastaavasti energiatiheys  $u$  tämän energiaksi. Tällöin voidaan kaavoilla (37), (43) ja (44) lausua fotonin liikemäärän  $\bar{\mathbf{p}}_0$  suuruudeksi

$$p_0 = |\bar{\mathbf{p}}_0| = |\bar{\mathbf{g}}_0| = \frac{\varepsilon_0}{c} |\bar{\mathbf{E}}|^2 = \frac{u}{c} = \frac{h\nu}{c}.\tag{45}$$

Tulokseen käytetyn mallin takana vaikuttavat oletukset ovat melko merkityksellisiä. Erityisesti yksittäisen fotonin liikemäärätiheyden  $\bar{\mathbf{g}}_0$  suuruuden yhdistäminen suoraan sen liikemäärän  $\bar{\mathbf{p}}_0$  suuruudeksi on rohkea harppaus. Ratkaisu on kuitenkin modernin kvanttimekaniikan valossa ymmärrettävissä niin, ettei fotonin energia, eli liikemäärä, sijaitse avaruudessa yhdessä tarkoin määrityissä pisteessä klassisen partikkelin tavoin, vaan on jakautunut tilavuudelliseksi tiheyssuureeksi. Täten yksittäistenkin valokvanttien kannalta liikemäärän käsite on ymmärrettävä nimenomaan avaruudellisen jakauman kautta.

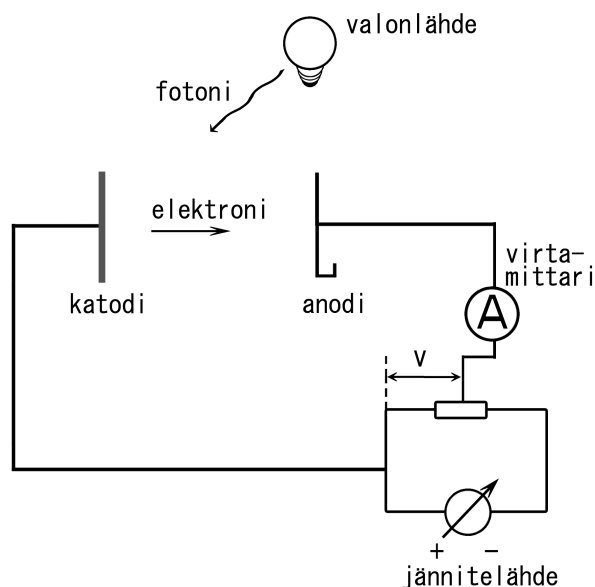
### 3 Valon liikemäärä väliaineessa

Käsite valon liikemäärästä tyhjiöolosuhteissa on jokseenkin abstrakti, sillä kaikki valoon liittyvät mittaasetelmat perustuvat sen mittaamiseen, kuinka valo vuorovaikuttaa aineen kanssa. Etenkin varhaiset mittaustaitteistot perustuivat usein valomylllynä tunnettuun laitteeseen, jossa peilipintaiseen siipirattaaseen kohdistuva valo ajaa sen pyörivään liikkeeseen. Tällaisten mittalaitteiden tapauksessa, kuten esimerkiksi Nicholsin [3] ja Lebedevin [5] kokeissa, mitattavana suureena on lopulta peiliin kohdistuva vääntömomentti, ja valosähköisessä ilmiössä [10] metallin elektronien saama liike-energia. Onkin äärimmäisen tärkeää ymmärtää paitsi valon itsensä luonne, myös sen vaikutusmekanismit materian kanssa.

Tässä luvussa käsitellään historiallisia teorioita valon ja aineen vuorovaikutuksesta, ja erityisesti Abraham-Minkowskin liikemääräristiriitaa. Osaa ristiriitaan liittyvistä koeasetelmista tarkastellaan tarkemmin, ja lopuksi esitellään teorioiden modernimpia tulkintoja, kuten massatiheysaaltoteoriaa.

#### 3.1 Einsteinin AB-vakiot

Luvussa 2.2 kuvatussa Planckin energiaosasmallista varsinaisen kvanttitulkinnan esitti Albert Einstein tutkiessaan valosähköistä ilmiötä vuonna 1905 [10]. Ilmiössä metallilevyä valaistessa siinä olevat elektronit saavat liike-energiaa kaavan (13) mukaisesti, kulkevat tyhjiöputken läpi, ja tämä liike-energia voidaan edelleen havaita mittauspiiriin syntyvänä sähkövirtana. Lähteen [11] mukainen yksinkertaistettu kaaviokuva koeasetelmasta on esitetty kuvassa 1.



Kuva 1: Valosähköisen ilmiön mittausasetelma.

Säätämällä katodille kohdistettavan valon intensiteettiä eli kirkkautta tai taajuut-



ta eli väriä, voidaan vaikuttaa syntyvän virran suuruuteen. Vaikka anodin ja katodin välinen jännite  $V$  säädettäisiin elektronien liikettä vastustavaksi, valon tuoman energian avulla elektronit kykenevät ylittämään tämän potentiaaliesteen, synnyttäen piiriin virran. Potentiaaliesteen ylittämiseen vaadittava minimienergia  $E$  voidaan laskea elektronien varauksesta  $e$  ja liikettä vastustavasta jännitteestä  $V$  kaavan (46) mukaisesti [11].

$$E = eV \quad (46)$$

Kuitenkaan tiettyä metallikohtaista raja-arvoa pienemmän taajuuden valonlähteillä virtaa ei synny lainkaan, vaikka valon intensiteettiä kuinka kasvatettaisiin. Ilmiötä ei voitu selittää klassisten teorioiden avulla, sillä niiden mukaan elektronien liike-energian tulisi riippua vain kentän kokonaisenergiasta, eli matalamman taajuuden synnyttämä energiavaje voitaisiin täyttää kasvattamalla valonlähteen kirkkautta. Kokeet kuitenkin osoittivat ettei näin käy, ja mallia oli korjattava.

Einstein esitti, että mikäli valo todellakin koostuisi Planckin mallin mukaisista energiaosista  $\epsilon = h\nu$ , näistä kukin voisi vuorovaikuttaa materian kanssa vain joko-tai-periaatteella: kentän ja aineen kohdatessa kukin energiaosa, eli foton, joko absorboituisi kokonaisuudessaan, muuttuen täten katodilevyllä yksittäisen elektronin liike-energiaksi, tai olisi täysin vuorovaikuttamatta [10]. Tällöin kirkkaasta mutta matalataajuuksisesta valonlähteestä tulisi kyllä runsaasti fotoneja eli energiaa, mutta koska niistä yhdelläkään ei ole yksin kylliksi energiaa elektronin ajamiseksi potentiaaliesteen toiselle puolelle, ei virtaa syntyisi. Teoria erosi täysin klassisen fysiikan kannalta keskeisistä energian jatkuvuuden malleista, mutta se selitti ilmiön erinomaisesti ja sopi kokeelliseen mittausaineistoon. Kutakin raja-arvoa suurempaa valon taajuutta vastaa tietty pysäytysjännite, jolla fotonien synnyttämä sähkövirta saadaan estettyä kokonaan. Tällä jännitteen arvolla fotonin elektronille luovuttama, kaavan (37) mukainen, energia on yhtäsuuri kaavassa (46) esitetyn potentiaaliesteen ylittämiseen vaadittavan energian kanssa. Tämän pysäytysenergian puolestaan tiedettiin mittausdatan perusteella riippuvan lineaarisesti käytettävän valonlähteen taajuudesta, ja riippuvuussuhdesuoran kulmakertoimen arvo oli juurikin jo aiemmilla erillisillä mittauksilla [8] selvitetty Planckin vakio  $h$ , mikä oli selvä merkki Einsteinin teorian paikkansapitävyydestä. [11]

Myöhemmin, vuonna 1917, Einstein muotoili lausekkeet kuuluisille A- ja B-vakioilleen [12], joilla oli jälkeenpäin kriittinen rooli muun muassa laserin keksimisessä [13]. AB-vakiot kuvaavat aineen ja valokvanttien vuorovaikutusmekanismia. Ideaalille kaksitilasyhteiselle atomille tai molekyylille, jolla on jotkin energiatilat  $Z_m$  ja  $Z_n$  ja näitä vastaavat ominaisenergiat  $\epsilon_m > \epsilon_n$ , vakio  $A_m^n$  kuvaa aikayksikköä kohden olevaa todennäköisyyttä sille, että atomin viritystila spontaanisti purkautuu ja ympäristöön vapautuu energiaerotusta vastaavan energinen foton. Vastaavasti  $B_n^m$  kuvaa tilannetta jossa foton absorboituu korottaen molekyylin viritystilaa  $n$ :stä  $m$ :ään, ja  $B_m^n$  tilannetta jossa viritystila purkautuu saapuvan fotonin vuoksi, jolloin syntyy uusi foton joka on täysin identtinen virityksen purkavan kanssa [13]. Einstein näytti [12], kuinka molekyylin viritystiloista saadaan johdettua Planckin kaavan (40) mallinen muoto Wienin siirtymälaista. Einsteinin muoto Wienin siirtymälaista on

esitetty kaavassa (47)

$$u = \frac{A_n^m}{B_m^n} \frac{1}{e^{(\epsilon_m - \epsilon_n)/k_B T} - 1}. \quad (47)$$

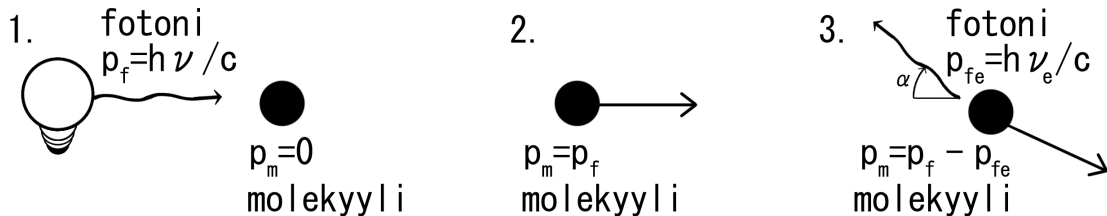
Tällöin kaavan (40) nojalla tulee myös päteä

$$\frac{A_n^m}{B_m^n} = \frac{8\pi}{c^3} \nu^3, \quad (48)$$

$$\epsilon_m - \epsilon_n = h\nu.$$

Kaava (48.1) on kriittinen laserin toimiperiaatteen kannalta, sillä se liittyy oleellisesti molekyylien virittymis- ja emissio-ominaisuuksiin, mutta valon perusluonteen ymmärtämisen kannalta oleellisempi on jälkiosa (48.2). Tulos tarkoittaa, että molekyylien emittoimien fotonien taajuus riippuu vain näiden viritystiloista, ja toisaalta myös sitä, ettei molekyyli voi absorboida fotoneja joiden taajuudet eivät vastaa mitään tämän viritysenenergioista. Tulos on sama kuin Einsteinin oletus valosähköisen ilmiön kohdalla, mutta mallin mutkaton yhteensopivuus Wienin siirtymälain kanssa tukee teorian uskottavuutta huomattavasti.

Fotonin annihiloituessa, eli kadotessa absorptioprosessissa, tai syntyessä emission kautta, systeemin kokonaisliikemäärän tulee yleisten säilymislakien nojalla pysyä samana. Työssään [12] Einstein esitti yhteen ulottuvuuteen rajatun, yksinkertaistetun mutta relativistisen kuvauksen siitä, kuinka liikemääräsuureet jakautuisivat absorptio- ja emissioprosesseissa molekyylin ja säteilykentän välillä. Fotonin absorboituessa molekyyliin, sen kaavassa (45) esitetyn liikemäärän tulee siirtyä kokonaisuudessaan molekyylin liikemääräksi, ja koska fotonit ovat massattomia, liikemäärä summautuu suoraan molekyylin nopeuteen. Absorption jälkeinen emissio m-massaisesta, alun perin paikallaan olevasta molekyylistä on selvennetty kuvan 2 kuvasarjassa.



Kuva 2: Fotonin absorptio ja uudelleenemissio.

Molekyylin itsensä energiatasot eivät olennaisesti muutu vaikka tämä ajautuisikin liikkeeseen, eli ideaalisen kaksitasosysteemin tapauksessa kuvan 2 vaiheessa 3. emittoituvan fotonin taajuus on molekyyliin kiinnitetyssä koordinaatistossa sama kuin vaiheessa 1. absorboidun. Kuitenkin molekyylin ympäristöön kiinnitetystä koordinaatistosta tarkastellessa emittoituvan fotonin taajuus riippuu sen lähtökulmasta  $\alpha$ . Kuvan 2 tapauksessa mikäli 3. vaiheen uusi fotoni emittoituu tismalleen samaan suuntaan kuin vaiheen 1. absorboituva fotoni oli etenemässä ennen absorptiota, emittoituva fotoni on taajuudeltaan lähes sama kuin absorboituva ja molekyyli palaa

miltei pysähdyksiin. Taajuus ei ole aivan sama kuin absorboituneen, sillä liikkuvan säteilijän tapauksessa tulee ottaa huomioon myös säteilyn Doppler-siirtymä. Ja koska säteilevän fotonin taajuus on eri kuin alkuperäisen, energia-erotuksen tulee jäädä absorboivan molekyylin liike-energiaksi. Liikkuville sähkömagneettisille säteilijöille relativistinen Doppler-siirros on kaavan (49) muotoa [14].

$$\nu_{obs} = \sqrt{\frac{c+v}{c-v}} \nu_e, \quad (49)$$

missä  $\nu_{obs}$  on havaitsijan mittaama taajuus,  $v$  havaitsijan koordinaatistossa mitattu säteilijän nopeus havaitsijan suuntaan ja  $\nu_e$  säteilijän koordinaatistossa mitattu taajuus emittoitavalle säteilylle. Molekyylin nopeus  $v$  voidaan laskea relativistisesta liikemäärästä kaavan (50) mukaisesti.

$$p = \gamma m v = \frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (50)$$

$$v = \frac{p}{\gamma m} = \frac{h\nu_e}{\gamma mc},$$

jolloin kaavan (49) mukaan kulmaan  $\alpha = \pi$  emittoituvan fotonin taajuus olisi kuvan 2 notaatioilla

$$\nu_e = \sqrt{\frac{c + \frac{h\nu}{\gamma mc}}{c - \frac{h\nu}{\gamma mc}}} \nu. \quad (51)$$

Todellisuudessa yksittäiset atomitkaan eivät ole ideaalisia kaksitasosysteemejä, vaan viritystilojen energiat ovat jossain määrin levinneitä, Heisenbergin epätarkkuusperiaatteen mukaisesti [13]. Lisäksi yksittäisen fotonin aiheuttama liikemäärän muutos on molekyylien tai jopa useimpien atomien massoihin nähden mitättömän pieni, jolloin emittoituvat fotonit ovat kulmasta riippumatta lähes samantaajuuksisia kuin absorboituvatkin. Tällöin esimerkiksi takaisin tulosuuntaan heijastuvat fotonit muuttavat molekyylin liikemäärää noin  $2h\nu/c$  verran, minkä vuoksi klassisissa valomyllyyn perustuvissa liikemäärämittauksissa saadaan peilipintoja käyttämällä korkeampi mittausherkkyyys kuin heikosti heijastavilla mattapinnoilla. Korkeissa lämpötiloissa säteilyn Doppler-siirtymällä on kuitenkin suuri merkitys, sillä suurilla nopeuksilla liikkuvat molekyylit aiheuttavat aineiden absorptio- ja emissiospektreihin huomattavan suuruisen levenemisen. Tämä on esimerkiksi lasereiden suunnittelussa kiusallinen epäideaalisuus, jonka vuoksi niistä saatava spektri on aina jossain määrin levinnyt [13]. Toisaalta ilmiötä voidaan käyttää myös hyväksi: laserjäähdytyksessä atomeja valaistaan taajuuksilla, jotka sijoittuvat Doppler-levinneessä spektrissä aineen lepotilaa vastaavan ominaistajuuden alapuolelle, jolloin vain valonlähdettä kohti liikkuvat atomit absorboivat lähteestä tulevia fotoneja. Koska uudelleenemissio tapahtuu satunnaiseen suuntaan, käytännössä kaikki absorboivat atomit menettävät osan valonlähteen suuntaisesta liike-energiastaan. Ainoa tapaus jolloin näin ei käy, on emissio alkuperäisen fotonin kulkusuuntaan siten, että viritystilat ovat juuri sopivissa määrin levinneitä, minkä tapahtumistodennäköisyys on mitättömän pieni.

Täten materiaalin mukaan tarkkaan säädetyn spektrisellä laserilla voidaan aineen tietyn suuntaiset nopeuskomponentit hävittää käytännössä kokonaan, ja kaikista kuudesta suunnasta valaisemalla terminen liike saadaan pysäytettyä lähes täysin. [15] Menetelmä on tehokas, ja se on edistänyt erityisesti kylmäfysiikan tutkimusta huomattavasti.

### 3.2 Abraham-Minkowskin liikemääräristiriita

1900-luvun alussa suhteellisuusteoria alkoi vakiinnuttaa asemaansa tiedeyhteisössä, ja jo tunnettuja ilmiöitä alettiin tarkastella ja testata tämän uuden teorian valossa tarkemmin. Kokeellisesti havaittiin, etteivät Hertziläiset muodot Maxwellin yhtälöistä päde, kun sähkömagneettisen kentän havaitsija liikkuu suhteessa säteilijään [16, 17]. Tarvittiin siis uusi teoria, joka yhdistäisi Maxwellin yhtälöt suhteellisuusteoriaan. Aihetta käsittelevät muun muassa Hermann Minkowski [16], Max Abraham [17], Albert Einstein ja Jakob Laub [18], sekä myöhemmin Rudolf Peierls [19]. Näistä erityisesti Abrahamin ja Minkowskin muotojen eroavaisuudet ovat muodostuneet odotettua suuremmaksi ongelmaksi, ja väittely mallien tulkinnoista ja luonteista on jatkunut yli sadan vuoden ajan. Tässä osiossa käyn läpi Abrahamin ja Minkowskin mallien perusideat. Pääpaino on Minkowskin muodossa, sillä Abrahamin teoria perustuu lähinnä Minkowskin mallin sovittamiseen ja tulkitsemiseen. Koska Einstein-Laubin teorian on argumentoitu vastaavan Abrahamin teorian termien uudelleenjärjestelyä [4], ja koska Peierlsin teoriaan liittyy sekä suuria teoreettisia kysymyksiä että ristiriitoja kokeellisen aineiston kanssa [20, 21, 22], jätän näiden tarkastelun väliin ja keskityn vain Abrahamin ja Minkowskin teorioihin.

Minkowskin [16] muoto lähtee liikkeelle Maxwellin yhtälöistä (1), mutta muuttaa formuloinnin suhteellisuusteoriassa keskeiseen nelivektorimuotoon, koordinaattikanalla  $x_1=x$ ,  $x_2=y$ ,  $x_3=z$ ,  $x_4=jt$ . Kaavan (1.2) virrantiheys  $\vec{J}$  voidaan tällöin kirjoittaa 1x4-vektorimuotoon

$$\begin{aligned} & [s_1, s_2, s_3, s_4] \\ & = [J_x, J_y, J_z, j\rho]. \end{aligned} \quad (52)$$

Samaten magneettikenttä  $\vec{H}$  ja sähkövuon tiheys  $\vec{D}$  voidaan liittää 1x6-vektoriin  $f$ , siten että

$$\begin{aligned} & [f_{23}, f_{31}, f_{12}, f_{24}, f_{34}, f_{42}] \\ & = [H_x, H_y, H_z, -jD_x, -jD_y, -jD_z], \end{aligned} \quad (53)$$

ja vastaavasti magneettivuon tiheys  $\vec{B}$  ja sähkökenttä  $\vec{E}$  vektoriin  $F$ :

$$\begin{aligned} & [F_{23}, F_{31}, F_{12}, F_{24}, F_{34}, F_{42}] \\ & = [B_x, B_y, B_z, -jE_x, -jE_y, -jE_z]. \end{aligned} \quad (54)$$

Huomautettakoon, että alkuperäisessä julkaisussaan [16] Minkowskillä oli kaavassa (54) inhimillinen merkkivirhe, ja vektorin  $F$  kahdesta viimeisestä termistä puuttui miinusmerkit. Merkkivirhe on ilmeinen, kun myöhemmin esitettävän kaavan (58)

laskee auki. Tämän vuoksi tässä esitetty määritelmä  $F$ :lle eroaa lähteessä käytetystä. Vektorien  $f$  ja  $F$  äkkiseltään epäintuitiiviselta tuntuva indeksointi selittyy tavalla, jolla niitä kuvataan: kenttien kuvaamiseen käytetään niin kutsuttua vuorottelevaa matriisia, jossa  $f_{ij} = -f_{ji}$  ja  $f$  ja  $F$  esitetään muodoissa

$$f = \begin{bmatrix} 0 & f_{12} & f_{13} & f_{14} \\ f_{21} & 0 & f_{23} & f_{24} \\ f_{31} & f_{32} & 0 & f_{34} \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & 0 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 0 & F_{12} & F_{13} & F_{14} \\ F_{21} & 0 & F_{23} & F_{24} \\ F_{31} & F_{32} & 0 & F_{34} \\ F_{41} & F_{42} & F_{43} & 0 \end{bmatrix}. \quad (55)$$

Selvyyden vuoksi matriisissa  $f$  on magneettikenttää  $\bar{\mathbf{H}}$  kuvaavat alkiot korostettu vihreällä ja sähkövuontiheyttä  $\bar{\mathbf{D}}$  kuvaavat sinisellä, ja vastaavasti matriisissa  $F$  sähkökenttä  $\bar{\mathbf{E}}$  on korostettu vihreällä ja magneettivuon tiheys  $\bar{\mathbf{B}}$  sinisellä. Vuorottelevalla matriisille on myös määriteltävissä duaalmatriisi  $f^*$ , jonka alkiot ovat

$$f^* = \begin{bmatrix} 0 & f_{34} & f_{42} & f_{23} \\ f_{43} & 0 & f_{14} & f_{31} \\ f_{24} & f_{41} & 0 & f_{12} \\ f_{32} & f_{13} & f_{21} & 0 \end{bmatrix} \quad (56)$$

ja jossa  $f$  ja  $F$  tapaan  $f_{ij}^* = -f_{ji}^*$ . Tällaiselle matriisille pätee  $f^*f = (f_{32}f_{14} + f_{13}f_{24} + f_{21}f_{34})I$ , missä  $I$  on  $4 \times 4$  identiteettimatriisi jonka jokainen diagonaalialkio on 1 ja ei-diagonaalialkio 0.  $f^*$  on siis tietyssä mielessä  $f$  skaalattu käänteismatriisi. Tällä muotoilulla voidaan Maxwellin yhtälöitä koota nelivektorimuotoon. Levossa olevalle systeemille voidaan (1.2) ja (1.3) esittää vektorien  $f$  ja  $s$  alkiodien avulla muodossa

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial f_{13}}{\partial x_3} + \frac{\partial f_{14}}{\partial x_4} &= s_1 \\ \frac{\partial f_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial f_{23}}{\partial x_3} + \frac{\partial f_{24}}{\partial x_4} &= s_2 \\ \frac{\partial f_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial f_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial f_{34}}{\partial x_4} &= s_3 \\ \frac{\partial f_{41}}{\partial x_1} + \frac{\partial f_{42}}{\partial x_2} + \frac{\partial f_{43}}{\partial x_3} &= s_4 \end{aligned} \quad (57)$$

ja vastaavasti (1.1) ja (1.4)  $F^*$  avulla

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_{34}}{\partial x_2} + \frac{\partial F_{42}}{\partial x_3} + \frac{\partial F_{23}}{\partial x_4} &= 0 \\ \frac{\partial F_{43}}{\partial x_1} + \frac{\partial F_{14}}{\partial x_3} + \frac{\partial F_{31}}{\partial x_4} &= 0 \\ \frac{\partial F_{24}}{\partial x_1} + \frac{\partial F_{41}}{\partial x_2} + \frac{\partial F_{12}}{\partial x_4} &= 0 \\ \frac{\partial F_{32}}{\partial x_1} + \frac{\partial F_{13}}{\partial x_2} + \frac{\partial F_{21}}{\partial x_3} &= 0 \end{aligned} \quad (58)$$

Tässä vihreällä korostetut alueet merkitsevät roottorielementtejä,  $f$  tapauksessa  $\nabla \times \bar{\mathbf{H}}$  ja  $F^*$  tapauksessa  $\nabla \times \bar{\mathbf{E}}$ , siniset alueet  $\bar{\mathbf{D}}$  ja  $\bar{\mathbf{B}}$  aikaderivaattoja, ja punaiset divergenssejä  $\nabla \cdot \bar{\mathbf{D}}$  ja  $\nabla \cdot \bar{\mathbf{B}}$ . Tulokset voidaan edelleen tiivistää kahden matriisiyhtälön muotoon

$$\begin{aligned} \text{lor } f &= -s \\ \text{lor } F^* &= 0, \end{aligned} \quad (59)$$

missä vektorimuotoinen operaattori  $lor$  on määritelty

$$lor = \left[ \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}, \frac{\partial}{\partial x_4} \right] \quad (60)$$

ja  $lor f$  toimii matriisitulon laskusääntöjen mukaisesti.

Minkowskin ensisijaisena tavoitteena oli luoda muotoilu, jolla sähkömagneettiset kenttäyhtälöt saataisiin suhteellisuusteorian kanssa yhteensopiviksi, eli havaitsijan ja säteilylähteen välinen nopeusero tulee ottaa huomioon. Mikäli kappale liikkuisi havaitsijaan nähden nopeudella  $\bar{\mathbf{v}} = v_x + v_y + v_z$ , voitaisiin se ilmaista 1x4 nelivektorilla  $w$ , jolle

$$w = [w_1, w_2, w_3, w_4] = \left[ \frac{v_x}{\sqrt{1-v^2}}, \frac{v_y}{\sqrt{1-v^2}}, \frac{v_z}{\sqrt{1-v^2}}, \frac{j}{\sqrt{1-v^2}} \right]. \quad (61)$$

Minkowski määrittelee myös kaavan (8) kenttävastaavuuksille relativistiset vastineet

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{D}} + (\bar{\mathbf{v}} \times \bar{\mathbf{B}}) &= \varepsilon(\bar{\mathbf{E}} + (\bar{\mathbf{v}} \times \bar{\mathbf{H}})) \\ \bar{\mathbf{B}} - (\bar{\mathbf{v}} \times \bar{\mathbf{E}}) &= \mu(\bar{\mathbf{H}} - (\bar{\mathbf{v}} \times \bar{\mathbf{D}})), \end{aligned} \quad (62)$$

jotka on esitettävissä myös matriisimuodossa

$$\begin{aligned} wf &= \varepsilon wF \\ wF^* &= \mu wf^*. \end{aligned} \quad (63)$$

Tapauksessa  $\bar{\mathbf{v}}=0$  tuloksena on suoraan kaavan (8) muoto. Minkowski määrittelee edelleen sähköisen lepovoiman (saks. *elektrische Ruh-Kraft*)  $\Phi = -wF$

$$\begin{aligned} \Phi &= [\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4] \\ \Phi_1 &= \quad \quad \quad w_2 F_{12} + \quad w_3 F_{13} + \quad w_4 F_{14} \\ \Phi_2 &= \quad w_1 F_{21} + \quad \quad \quad w_3 F_{23} + \quad w_4 F_{24} \\ \Phi_3 &= \quad w_1 F_{31} + \quad w_2 F_{32} + \quad \quad \quad w_4 F_{34} \\ \Phi_4 &= \quad w_1 F_{41} + \quad w_2 F_{42} + \quad w_3 F_{43} \end{aligned} \quad (64)$$

Tässä vihreällä korostetut alueet vastaavat termiä  $\bar{\mathbf{v}} \times \bar{\mathbf{B}}$ , punainen alue pistetuloa  $\bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\mathbf{E}}$  ja sininen on suoraan sähkökenttä  $\bar{\mathbf{E}}$  ilman imaginäärilukua  $j$ , skaalattuna nopeustermien nimittäjällä. Vastaava magneettinen lepovoima (saks. *magnetische Ruh-Kraft*)  $\Psi = jwf^*$  on

$$\begin{aligned} \Psi &= [\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \Psi_4] \\ \Psi_1 &= -j( \quad \quad \quad w_2 f_{34} + \quad w_3 f_{42} + \quad w_4 f_{23} ) \\ \Psi_2 &= -j( w_1 f_{43} + \quad \quad \quad w_3 f_{14} + \quad w_4 f_{31} ) \\ \Psi_3 &= -j( w_1 f_{24} + \quad w_2 f_{41} + \quad \quad \quad w_4 f_{12} ) \\ \Psi_4 &= -j( w_1 f_{32} + \quad w_2 f_{13} + \quad w_3 f_{21} ) \end{aligned} \quad (65)$$

Tässä vastaavasti  $(-j)$ :llä kertomisen jälkeen vihreä alue vastaa termiä  $\bar{\mathbf{v}} \times \bar{\mathbf{D}}$ , punainen termiä  $\bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\mathbf{H}}$  ja sininen alue on suoraan vektori  $\bar{\mathbf{H}}$ .  $f$  ja  $F$  voidaan kirjoittaa  $\Phi$  ja  $\Psi$  avulla muotoon

$$\begin{aligned} f &= \varepsilon(w \tilde{\times} \Phi) + j(w \tilde{\times} \Psi)^* \\ F &= (w \tilde{\times} \Phi) + j\mu(w \tilde{\times} \Psi)^*, \end{aligned} \quad (66)$$

missä  $\tilde{\times}$  on ristitulon kaltainen operaattori joka on määritelty siten, että

$$\begin{aligned}
 a &= [a_1, a_2, a_3, a_4] \\
 b &= [b_1, b_2, b_3, b_4] \\
 c &= a \tilde{\times} b = [c_{23}, c_{31}, c_{12}, c_{14}, c_{24}, c_{34}] \\
 c_{23} &= a_2 b_3 - a_3 b_2 \\
 c_{31} &= a_3 b_1 - a_1 b_3 \\
 c_{12} &= a_1 b_2 - a_2 b_1 \\
 c_{14} &= a_1 b_4 - a_4 b_1 \\
 c_{24} &= a_2 b_4 - a_4 b_2 \\
 c_{34} &= a_3 b_4 - a_4 b_3,
 \end{aligned} \tag{67}$$

eli  $\tilde{\times}$  luo  $f$  ja  $F$  kaltaisen  $1 \times 6$ -vektorin, joka on esitettävissä  $4 \times 4$  vuorottelevana matriisinä ja jonka alkioina ovat kaikki mahdolliset ristitulotermit kerrottavista vektoreista  $a$  ja  $b$ . Duaalimuoto  $(a \tilde{\times} b)^*$  on kaavan (56) mukainen.

$\Phi$ ,  $\Psi$  ja  $w$  avulla voidaan määrittää myös leposäde (saks. *Ruh-Strahl*)  $\Omega$

$$\begin{aligned}
 \Omega &= jw(\Phi \tilde{\times} \Psi)^*, \text{ eli} \\
 \Omega_1 &= -j \begin{vmatrix} w_2 & w_3 & w_4 \\ \Phi_2 & \Phi_3 & \Phi_4 \\ \Psi_2 & \Psi_3 & \Psi_4 \end{vmatrix} = -j(w_2(\Phi_3 \Psi_4 - \Phi_4 \Psi_3) - w_3(\Phi_2 \Psi_4 - \Phi_4 \Psi_2) + w_4(\Phi_2 \Psi_3 - \Phi_3 \Psi_2)) \\
 \Omega_2 &= -j \begin{vmatrix} w_1 & w_3 & w_4 \\ \Phi_1 & \Phi_3 & \Phi_4 \\ \Psi_1 & \Psi_3 & \Psi_4 \end{vmatrix} jne.
 \end{aligned} \tag{68}$$

Leposäde  $\Omega$  on siis tavallaan abstraktimpi laajennos Poyntingin vektorista  $\bar{\mathbf{S}}$ : sähkö- ja magneettikenttien tilalla on sähköiset ja magneettiset lepovoimat, ja ristitulo-operaattori on korvattu saman kaltaisella  $\tilde{\times}$ -operaattorilla.

Varsinainen Minkowskin rasiustensori  $T_M$  saadaan, kun kerrotaan  $f$  ja  $F$  keskenään:

$$fF = T_M - L = \begin{bmatrix} X_x & Y_x & Z_x & -jT_x \\ X_y & Y_y & Y_z & -jT_y \\ X_z & Y_z & Z_z & -jT_z \\ -jX_t & -jY_t & -jZ_t & T_t \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} L & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L \end{bmatrix}, \tag{69}$$

missä  $L$  on Lagrangen funktio  $L = \frac{1}{2}(\bar{\mathbf{H}} \cdot \bar{\mathbf{B}} - \bar{\mathbf{D}} \cdot \bar{\mathbf{E}})$ . Itse tensorin  $T_M$  alkioille saadaan lausekkeet

$$\begin{aligned}
 T_M^{ij} &= -\frac{1}{2}\delta^{ij}(\bar{\mathbf{B}} \cdot \bar{\mathbf{H}} + \bar{\mathbf{D}} \cdot \bar{\mathbf{E}}) + B_i H_j + D_i E_j \quad i, j = 1, 2, 3 \\
 T_M^{4i} &= (\bar{\mathbf{D}} \times \bar{\mathbf{B}})_i \quad i = x, y, z \\
 T_M^{i4} &= (\bar{\mathbf{E}} \times \bar{\mathbf{H}})_i \quad i = x, y, z \\
 T_M^{44} &= \frac{1}{2}(\bar{\mathbf{H}} \cdot \bar{\mathbf{B}} + \bar{\mathbf{D}} \cdot \bar{\mathbf{E}}),
 \end{aligned} \tag{70}$$

missä Kroneckerin deltafunktio on määritelty

$$\begin{aligned}\delta^{ij} &= 1, \text{ jos } i = j \\ &= 0, \text{ jos } i \neq j.\end{aligned}\tag{71}$$

Merkintä  $(\bar{\mathbf{A}} \times \bar{\mathbf{B}})_a$  tarkoittaa  $\bar{\mathbf{A}}$  ja  $\bar{\mathbf{B}}$  ristitulon  $a$ -suuntaisen komponentin skalaariosaa. Levossa olevassa systeemissä kaavan (70.1) termit vastaavat suoraan niin kutsuttuja Maxwellin rasiustermejä, (70.2) liikemäärää, (70.3) Poyntingin vektoria ja  $T_M^{44} = T_t$  on suoraan kaavan (10) mukainen kentän energiatiheystermi. Nykyään Minkowskin tensoriin viitattaessa tarkoitetaan usein [4, 20, 23] sen duaalimuotoa,  $F^{*}f^{*} = -T_M - L$ , joka on muutoin sama kuin kaavassa (70) esitetty, mutta jokaisen alkion etumerkki on vaihdettu.

Relativistinen muoto tensorista saadaan, kun suoran  $\mathbf{f}\mathbf{F}$ -tulon sijaan käytetään  $\mathbf{f}$  ja  $\mathbf{F}$  kaavassa (66) esitettyjä muotoja. Tällöin Lagrangen funktiolle ja tensorielementeille saadaan vaihtoehtoiset muodot

$$\begin{aligned}L &= -\frac{1}{2}(\varepsilon\Phi\Phi^T - \mu\Psi\Psi^T) \\ T_M^{ij} &= -\frac{1}{2}\delta^{ij}(\varepsilon\Phi\Phi^T + \mu\Psi\Psi^T) \\ &\quad + \varepsilon(\Phi_i\Phi_j - \Phi\Phi^T w_i w_j) + \varepsilon(\Psi_i\Psi_j - \Psi\Psi^T w_i w_j) - \Omega_i w_j - \mu\varepsilon w_i \Omega_j,\end{aligned}\tag{72}$$

missä  $\Phi^T$  ja  $\Psi^T$  merkitsevät  $\Phi$  ja  $\Psi$  transpooseja, jolloin tulo  $\Phi\Phi^T = \Phi_1^2 + \Phi_2^2 + \Phi_3^2 + \Phi_4^2$ . Vastaava lauseke pätee myös termille  $\Psi\Psi^T$ .

Minkowskin tensorista saadaan voimatiheyssuureita operoimalla siihen lor-operaattorilla. Vektorille  $\mathbf{K}=\text{lor } \mathbf{T}_M$  saadaan alkioiksi

$$\begin{aligned}K_1 &= \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} - \frac{\partial X_t}{\partial t} \\ &= \rho E_x + (J_y B_z - J_z B_y) - \frac{1}{2}(\Phi\Phi^T \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} - \Psi\Psi^T \frac{\partial \mu}{\partial x}) + \frac{\varepsilon\mu-1}{\sqrt{1-\bar{\mathbf{v}}^2}}(\bar{\mathbf{B}} \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial x}) \\ K_2 &= \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} - \frac{\partial Y_t}{\partial t} \\ &= \rho E_y + (J_z B_x - J_x B_z) - \frac{1}{2}(\Phi\Phi^T \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} - \Psi\Psi^T \frac{\partial \mu}{\partial y}) + \frac{\varepsilon\mu-1}{\sqrt{1-\bar{\mathbf{v}}^2}}(\bar{\mathbf{B}} \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial y}) \\ K_3 &= \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} - \frac{\partial Z_t}{\partial t} \\ &= \rho E_z + (J_x B_y - J_y B_x) - \frac{1}{2}(\Phi\Phi^T \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} - \Psi\Psi^T \frac{\partial \mu}{\partial z}) + \frac{\varepsilon\mu-1}{\sqrt{1-\bar{\mathbf{v}}^2}}(\bar{\mathbf{B}} \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial z}) \\ K_4 &= -j(\frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\partial T_y}{\partial y} + \frac{\partial T_z}{\partial z} + \frac{\partial T_t}{\partial t}) \\ &= j(J_x E_x + J_y E_y + J_z E_z) + j\frac{1}{2}(\Phi\Phi^T \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} - \Psi\Psi^T \frac{\partial \mu}{\partial t}) + j\frac{\varepsilon\mu-1}{\sqrt{1-\bar{\mathbf{v}}^2}}(\bar{\mathbf{B}} \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial t}).\end{aligned}\tag{73}$$

Toisin sanottuna

$$\begin{aligned}K_{xyz} &= \rho\bar{\mathbf{E}} + \bar{\mathbf{J}} \times \bar{\mathbf{B}} - \frac{1}{2}[\Phi\Phi^T(\nabla\varepsilon) + \Psi\Psi^T(\nabla\mu)] + \frac{\varepsilon\mu-1}{\sqrt{1-\bar{\mathbf{v}}^2}}[\bar{\mathbf{B}} \cdot (\nabla\bar{\mathbf{v}})] \\ K_t &= j(\bar{\mathbf{J}} \cdot \bar{\mathbf{E}} + \frac{1}{2}(\Phi\Phi^T \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} - \Psi\Psi^T \frac{\partial \mu}{\partial t}) + \frac{\varepsilon\mu-1}{\sqrt{1-\bar{\mathbf{v}}^2}}(\bar{\mathbf{B}} \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial t})).\end{aligned}\tag{74}$$

Kentän aineeseen aiheuttamat voimantiheydet saadaan edelleen lausekkeesta

$$\bar{\mathbf{f}}_M = \mathbf{K} + (w\mathbf{K}^T)w.\tag{75}$$



Ei-relativistisessa tapauksessa, eli kun  $\bar{\mathbf{v}} = 0$ , saadaan  $\Phi\Phi^T = E^2$ ,  $\Psi\Psi^T = H^2$  ja kaavan (75) viimeinen termi tuottaa vain vektorin  $(0, 0, 0, -K_4)$ , joka summattuna hävittää  $\mathbf{K}$ :n viimeisen alkion  $K_t$ . Voimantiheyssuureista puolestaan saadaan liikemäärätiheyssuureita suoraan voiman määritelmän kautta.

Minkowskin muodon yhtenä etuna on sen suora yhteensopivuus Lorentz-muunnoksen kanssa: lineaariset muunnokset aika- ja paikkakoordinaateissa vastaavat käytännössä vain lor-operaattorin skaalausta vakiotermeillä, mikä siirtyy sellaisenaan vektoreihin  $\Phi$  ja  $\Psi$  ja edelleen kaavan (75) voimantiheyslausekkeisiin. Erityisesti kentän energian etenemisnopeus  $\bar{\mathbf{E}} \times \bar{\mathbf{H}}/T_t$  käyttäytyy Lorentz-muunnoksissa partikkelin nopeuden tavoin, mikä on paitsi laskennallisesti eleganttia, myös todennettu kokeellisesti [20]. Lisäksi Minkowskin muodon suuret ovat suoraan nelivektorimuodossa, jolloin niiden sovittaminen muihin relativistisiin laskuihin on mutkatonta.

Abrahamin [17] muoto puolestaan lähtee liikkeelle Poyntingin lain (13) relativistisesta laajennoksesta

$$\bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\mathbf{f}} + \bar{\mathbf{J}} \cdot \bar{\mathbf{E}} = -\nabla \cdot (\bar{\mathbf{S}} - \bar{\mathbf{v}}u) - \frac{\delta u}{\delta t}, \quad (76)$$

missä  $\bar{\mathbf{f}}$  on voimatiheys,  $\bar{\mathbf{v}}$  nopeusvektori, ja derivaattaoperaattori  $\delta/\delta t$  on määritelty

$$\frac{\delta \bar{\mathbf{a}}}{\delta t} = \frac{\partial \bar{\mathbf{a}}}{\partial t} + (\bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla) \bar{\mathbf{a}} + \bar{\mathbf{a}}(\nabla \cdot \bar{\mathbf{v}}). \quad (77)$$

Voimantiheys  $\bar{\mathbf{f}}$  voidaan ilmaista kaavan (73) ylärivien mukaisessa muodossa

$$\begin{aligned} f_x &= \frac{\partial X'_x}{\partial x} + \frac{\partial X'_y}{\partial y} + \frac{\partial X'_z}{\partial z} - \frac{\delta g_x}{\delta t} \\ f_y &= \frac{\partial Y'_x}{\partial x} + \frac{\partial Y'_y}{\partial y} + \frac{\partial Y'_z}{\partial z} - \frac{\delta g_y}{\delta t}, \\ f_z &= \frac{\partial Z'_x}{\partial x} + \frac{\partial Z'_y}{\partial y} + \frac{\partial Z'_z}{\partial z} - \frac{\delta g_z}{\delta t} \end{aligned} \quad (78)$$

missä tensorielementit on määritelty kuten Minkowskin tensorille kaavassa (70.1), mutta  $\bar{\mathbf{E}}$  ja  $\bar{\mathbf{H}}$  tilalla käytetään suureita  $\bar{\mathbf{E}}'$  ja  $\bar{\mathbf{H}}'$ , jotka on määritelty kentiksi väliaineessa. Mikäli  $\bar{\mathbf{v}} = 0$ ,  $\bar{\mathbf{E}}' = \bar{\mathbf{E}}$ . Abrahamin 3x3-tensorimuoto on siis määriteltävissä

$$T_A = \begin{bmatrix} X'_x & X'_y & X'_z \\ Y'_x & Y'_y & Y'_z \\ Z'_x & Z'_y & Z'_z \end{bmatrix}. \quad (79)$$

Toisin sanottuna, tapauksessa  $\bar{\mathbf{v}} = 0$  tämä on identtinen kaavan (69) vasemman ylänurkan 3x3-lohkon kanssa. Abraham määrittelee lisäksi suhteellisen säteen  $\bar{\mathbf{S}}'$ , joka on liitettävissä Poyntingin vektorin tapaiseen vektoriin  $\bar{\mathbf{S}}_A$  kaavalla (80).

$$\bar{\mathbf{S}}_A - \bar{\mathbf{v}}u = \bar{\mathbf{S}}' - \bar{\mathbf{v}}T_A. \quad (80)$$

Jälleen, jos  $\bar{\mathbf{v}} = 0$ ,  $\bar{\mathbf{S}}_A = \bar{\mathbf{S}}'$ . Suhteellinen säde on kuten kaavan (13.2) Poyntingin vektori, mutta määritelty kenttien  $\bar{\mathbf{E}}'$  ja  $\bar{\mathbf{H}}'$  kautta.

$$\bar{\mathbf{S}}' = \bar{\mathbf{E}}' \times \bar{\mathbf{H}}'. \quad (81)$$

Tästä saadaan johdettua energiatiheydelle  $u$  lauseke

$$u_A = \frac{1}{2}(\bar{\mathbf{E}}' \cdot \bar{\mathbf{D}} + \bar{\mathbf{H}}' \cdot \bar{\mathbf{B}}) + \bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\mathbf{g}} \quad (82)$$

ja edelleen vektorille  $\bar{\mathbf{S}}_A$

$$\bar{\mathbf{S}}_A = \bar{\mathbf{E}}' \times \bar{\mathbf{H}}' + \bar{\mathbf{E}}' \times (\bar{\mathbf{v}} \times \bar{\mathbf{D}}) + \bar{\mathbf{H}}' \times (\bar{\mathbf{v}} \times \bar{\mathbf{B}}) + \bar{\mathbf{v}} \cdot (\bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\mathbf{g}}). \quad (83)$$

Kun Abrahamin lausekkeisiin yhdistetään kaavassa (62) määritelty riippuvuussuhteet  $\bar{\mathbf{E}}$  ja  $\bar{\mathbf{D}}$  ja  $\bar{\mathbf{H}}$  ja  $\bar{\mathbf{B}}$  välillä, saadaan liikemäärälle

$$\bar{\mathbf{g}}_A = \frac{\bar{\mathbf{S}}_A}{c^2} \quad (84)$$

$$= \frac{\bar{\mathbf{E}} \times \bar{\mathbf{H}}}{c^2}, \quad \text{kun } \bar{\mathbf{v}} = 0.$$

Abraham määrittelee myös kaavaa (74.1) vastaavan muodon voimantiheyden lausekkeelle. Levossa olevalle systeemille, joka täyttää Minkowskin lineaarisuusehdot, se saadaan muotoon

$$\bar{\mathbf{f}}_A = \rho \bar{\mathbf{E}} + \bar{\mathbf{J}} \times \bar{\mathbf{B}} - \frac{1}{2}(\bar{\mathbf{E}} \cdot \bar{\mathbf{E}} \nabla \varepsilon + \bar{\mathbf{H}} \cdot \bar{\mathbf{H}} \nabla \mu) + \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\varepsilon_r \mu_r - 1}{c^2} \bar{\mathbf{E}} \times \bar{\mathbf{H}} \right\}. \quad (85)$$

Kaava (85) on viimeistä termiä lukuunottamatta sama kuin Minkowskin vastaava lauseke (74.1). Lausekkeet erottavaa termiä  $\partial/\partial t \{(\mu_r \varepsilon_r - 1) \bar{\mathbf{E}} \times \bar{\mathbf{H}}/c^2\}$  kutsutaankin Abrahamin voimaksi.

Abraham-Minkowskin liikemääräristiriita juontuu eri muotojen tavoista ilmaista liikemäärätiheyttä  $\bar{\mathbf{g}}$ . Abraham määrittelee liikemääräsuureeksi suoraan kaavan (84) muodon, kun taas Minkowskin tapauksessa suure on implisiittisenä tensorin (69) alarivillä. Saadaan siis kaksi eriävää liikemäärätiheyttä,

$$\bar{\mathbf{g}}_M = \bar{\mathbf{D}} \times \bar{\mathbf{B}} \quad \text{ja} \quad (86)$$

$$\bar{\mathbf{g}}_A = \frac{\bar{\mathbf{E}} \times \bar{\mathbf{H}}}{c^2},$$

missä alaindeksit M ja A viittaavat Minkowskin ja Abrahamin muotoihin. Suoralla laskulla nähdään myös että nämä liikemäärätiheydet liittyvät kaavan (85) Abrahamin voimaan  $f_{Abr}$  kaavan (87) kautta.

$$\bar{\mathbf{f}}_{Abr} = \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\varepsilon_r \mu_r - 1}{c^2} \bar{\mathbf{E}} \times \bar{\mathbf{H}} \right\} = \frac{\partial \bar{\mathbf{g}}_M}{\partial t} - \frac{\partial \bar{\mathbf{g}}_A}{\partial t}. \quad (87)$$

Kaavan (86) liikemääräsuureista saadaan kaavan (8) mukaisissa väliaineissa johdettua yksittäisen fotonin liikemäärä samalla menettelyllä kuin tyhjiönkin tapauksessa kaavoissa (42–45). Minkowskin muoto (86.1) voidaan siis kirjoittaa auki

$$\begin{aligned} |\bar{\mathbf{g}}_M| &= |\bar{\mathbf{D}} \times \bar{\mathbf{B}}| = \varepsilon_0 \varepsilon_r |\bar{\mathbf{E}} \times \bar{\mathbf{B}}| \\ &= \varepsilon_0 \varepsilon_r \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} \sqrt{\varepsilon_r \mu_r} |\bar{\mathbf{E}}|^2 \\ &= \sqrt{\varepsilon_r \mu_r} \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r |\bar{\mathbf{E}}|^2}{c}, \end{aligned} \quad (88)$$

josta asettamalla kaavan (45) tapaan energiatiheydeksi  $u = \varepsilon_0 \varepsilon_r |\bar{\mathbf{E}}|^2 = h\nu$  saadaan fotonin liikemääräksi

$$p_M = |\bar{\mathbf{p}}_M| = |\bar{\mathbf{g}}_M| = n \frac{h\nu}{c} = np_0, \quad (89)$$

missä  $n = \sqrt{\varepsilon_r \mu_r}$  on väliaineen taitekerroin ja  $p_0$  fotonin liikemäärä tyhjiössä. Vastaavasti Abrahamin muodolle (86.2) saadaan

$$\begin{aligned} |\bar{\mathbf{g}}_A| &= \frac{|\bar{\mathbf{E}} \times \bar{\mathbf{H}}|}{c^2} = \frac{1}{\mu_0 \mu_r} \frac{|\bar{\mathbf{E}} \times \bar{\mathbf{B}}|}{c^2} \\ &= \frac{\sqrt{\mu_0 \mu_r} \sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon_r} |\bar{\mathbf{E}}|^2}{\mu_0 \mu_r c^2} \\ &= \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r |\bar{\mathbf{E}}|^2}{\sqrt{\mu_r \varepsilon_r} \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} c^2} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r |\bar{\mathbf{E}}|^2}{\sqrt{\mu_r \varepsilon_r} c}, \end{aligned} \quad (90)$$

josta jälleen energiatiheyden avulla

$$p_A = |\bar{\mathbf{p}}_A| = \frac{h\nu}{nc} = \frac{p_0}{n}. \quad (91)$$

Fysikaalisesti kaavojen (89) ja (91) ero on merkittävä. Minkowskin muodon (89) mukaan valon siirtyessä tyhjiöstä n-taitekertoimiseen väliaineeseen, sen liikemäärä kasvaa n-kertaiseksi. Abrahamin muoto puolestaan merkitsee juuri päinvastaista, eli että liikemäärä pienenee 1/n osaan tyhjiön liikemäärästä. Kummankin teorian puolesta on esitetty runsaasti vakuuttavia teoreettisia argumentteja ja useita kokeita on suoritettu, mutta kumpaakaan teoriaa ei ole sadassa vuodessa saatu osoitettua toista oikeammaksi. On myös esitetty [4, 23, 24] että molemmat teoriat olisivat oikeassa, mutta kuvaisivat eri tyyppisiä liikemääriä. Näitä liikemäärän jakautumisteorioita on käsitelty luvussa 3.4 ja jo suoritettuja kokeita luvussa 3.3.

### 3.3 Valon liikemäärän mittaaminen väliaineessa

Abraham-Minkowskin liikemääräristiriidan ratkaisemiseksi on teoreettisten pohdintojen lisäksi suoritettu suuri määrä kokeita. Kuitenkin koeasetelmasta riippuen tulokset ovat näyttäneet tukevan joko Abrahamin tai Minkowskin liikemäärämuotoa, eli ristiiriita on kokeiden myötä lähinnä vain syventynyt entisestään. Tässä osiossa käyn läpi muutaman esimerkin aiemmista koeasetelmista ja -tuloksista.

Kokeista kenties tunnetuin on Jonesin ja Richardsin nestekoe vuodelta 1953 [25]. Kokeessaan he upottivat peilipintaisen siipirattaan kuuteen eri nesteeseen ja mittasivat rattaan kääntymisnopeuden kautta siihen kohdistuvan fotonipaineen. Ratasta valaistiin volframilampun valolla vuorotellen eri puolilta, jolloin lämpenemisestä johtuvat hitaat virtausvaikutukset voidaan erottaa fotonipaineen välittömistä vaikutuksista. Nesteinä käytettiin vettä, etanolia, hiilitetrakloridia, ksyleeniä, bentseeniä ja hiilisulfidia, ja tuloksia verrattiin ilmassa saatuihin lukemiin. Nesteet valikoitiin siten, että ne kattaisivat mahdollisimman suuren taitekerroinskaalan, mutta kuitenkin

niin ettei absorptiossa tai viskositeetissä olisi suuria vaihteluja. Kustakin nesteestä suoritettiin lukuisia eri mittauksia virheiden pienentämiseksi, näiden taitekertoimet mitattiin tarkistukseksi, ja lukuisten eri virhemahdollisuuksien suuruuksia arvioitiin. Koe oli siis laaja ja perusteellinen ja sen tulokset osoittivat, että rattaaseen kohdistuva fotonipaine on n-taitekertoimisessa nesteessä noin prosentin virhemarginaalilla n-kertainen ilmassa mitattuun paineeseen nähden. Laserin ja ohutkalvotekniikan kehityksen myötä koeasetelmaa saatiin paranneltua, ja vuoden 1977 uusintamittauksissa tulosten virhemarginaali saatiin laskettua arvoon 0,05% [26].

Laserin lisäksi myös puolijohdetekniikan kehittyminen toi uusia mahdollisuuksia valon liikemäärämittauksiin. Vuonna 1970 Danishevskii et al. [27] mittasivat  $\square$ -muotoisten p- ja n-tyyppisten germaniumkiteiden päiden väliin indusoituvan jännitteen, kun niitä valaistiin eri suunnista 1060 nm aallonpituudella CO<sub>2</sub>-laserilla. Kokeen varsinaisena päämääränä ei ollut Abrahamin ja Minkowskin liikemäärämuotojen vertailu, vaan Grinbergin [28] varausdynamikkateorian paikkansapitävyyden testaaminen. Kuitenkin kyseisen teorian mukaan liikemäärä, jonka varauksenkuljettajat valon absorboituessa vastaanottavat, on suoraan verrannollinen puolijohteen taitekertoimeen n. Täten Minkowskin muoto oli kokeessa välillisesti mukana ja koetulosten yhteensopivuus Grinbergin teorian kanssa tukee Minkowskin muotoa. Myöhemmin Gibson et al. [21] toistivat kokeen vertaillakseen eri liikemäärämuotoja. Kokeessa mitattiin indusoituvan jännitteen kautta niin kutsuttua fotonivetovakiota (eng. *photon-drag coefficient*)  $E_{ind}/|\bar{\mathbf{S}}|\sigma_a$  [22], missä  $E_{ind}$  on varausten liikkeestä kiteen sisälle syntyvä jännite ja  $\sigma_a$  varausten kaappausalue, eli etäisyyskaala jolla fotonit voi vuorovaikuttaa a-tyyppisen varauksen (elektronin tai aukon) kanssa. Laserin aallonpituutta kasvatettaessa fotonien vuorovaikutus itse hilan kanssa vähenee, ja lopulta absorboituvien fotonien liikemäärä siirtyy käytännössä täysin varausten liikemääräksi. Toisin sanottuna [22]

$$\frac{p}{\hbar\omega e} = \frac{E_{ind}}{|\bar{\mathbf{S}}|\sigma_a}, \quad (92)$$

missä  $\hbar$  on redusoitu Planckin vakio  $h/2\pi$  ja  $e$  alkeisvaraus. Kaavasta (92) saadaan edelleen havainnollisempi muoto

$$\frac{|\bar{\mathbf{S}}|}{\hbar\omega}\sigma_a p = eE_{ind}, \quad (93)$$

eli vasemman puolen absorboituneen liikemäärän tulee vastata varausten liike-energiaa  $eE_{ind}$ .  $|\bar{\mathbf{S}}|$  ja  $\omega$  voidaan mitata suoraan käytettävästä laserista,  $\sigma_a$  tunnetaan kokeellisesti, ja  $eE_{ind}$  voidaan mitata kiteen päiden välille indusoituvasta jännitteestä tai virrasta kiteen sisällä. Kokeessa käytettiin sekä n- että p-tyyppisiä germanium- ja piikiteitä, joita valaistiin eri taajuuksilla lasereilla. Kaikissa mittauksissa fotonivetovakion matalan taajuuden raja-arvoksi saatiin Minkowskin liikemäärän ennustama arvo, joka on noin kymmenkertainen Abrahamin vastaavaan nähden. On argumentoitu [4, 23, 22], että koeasetelmassa vaikuttaisivat sekä Minkowskin että Abrahamin liikemäärämuodot: varauksenkuljettajien omaksuma liikemäärä olisi puhtaasti Minkowskin liikemäärämuodon mukainen, ja Abrahamin liikemäärä vaikuttaisi kidehilaan, eikä sitä siksi voitaisi havaita syntyvästä jännitteestä. Liikemäärän jakautumisteorioita käydään tarkemmin läpi luvussa 3.4.

Abrahamin muotoa tukevia kokeita on Minkowskin muodon kokeisiin nähden vähän. Pääasiallisena syynä on usein Abrahamin voiman pienuus sekä se, että optisilla taajuuksilla ilmiö keskiarvoistuu helposti näkymättömiin [20]. Kokeellisesti Abrahamin voima on havaittu lähinnä matalien taajuuksien sähkömagneettisissa kokeissa, joissa terahertsien taajuudella värähtelevien optisten kenttien sijaan käytetään hitaasti vaihtuvia, eli kvasistaattisia, sähkö- ja magneettikenttiä. Yksi tällaisista kokeista oli G. B. Walkerin ja G. Walkerin koe vuonna 1975 [29], jossa mitattiin bariumtitanaatista valmistetun kiekkokondensaattorin vääntymää sen altistuessa voimakkaalle magneettikentälle. Kiekon keskelle porattiin reikä, ja reiän reunapinnat sekä kiekon ulkoreunat päällystettiin hopealla, jolloin tuloksena oli kapea kaksoissylinterin mallinen kondensaattori. Abrahamin teorian mukaan kiekossa tulisi vaikuttaa voima  $(\partial \bar{\mathbf{P}}_e / \partial t) \times \bar{\mathbf{H}}$ , joka siis kallistaisi kiekkoa, sillä sähköinen polarisaatio  $\bar{\mathbf{P}}_e$  on kiekossa sylinterisymmetrinen keskireiän suhteen, kun taas  $\bar{\mathbf{H}}$  ajetaan ulkoisilla magneeteilla kiekon yhdeltä reunalta vastakkaiselle. Koe oli kuitenkin teknisesti hankala toteuttaa: heikon suureen havaitsemiseksi oli käytettävä voimakkaita kenttiä, jolloin pienetkin epäideaalisuudet mittalaitteen rakenteessa aiheuttivat ei-haluttuja takaisinkytketymisiä käytettävään sähkömagneettipiiriin, ja vaikeasti mallinnettavat muutokset pintavaraustiheyksissä monimutkistivat mallia huomattavasti [30, 31]. Kokeen tulokset olivat aluksi itse asiassa räikeästi ristiriidassa sekä Abrahamin että Minkowskin teorioiden kanssa [30], ja vasta pitkällisen koeasetelman säätämisen jälkeen tulokset olivat tulkittavissa Abrahamin teoriaan sopiviksi. Koetta on kritisoitu siitä, että siinä tarkastellaan väliaineen käyttäytymistä ulkoa päin makroskooppisena kokonaisuutena, eikä niinkään kentän käyttäytymistä aineen sisällä [6]. Tällöin, kuten kokeen tekijät itsekin totesivat, aineen ulkoisten häiriötekijöiden, kuten heijastusten ja pintavarauskenttien, vaikutukset hankaloittavat tulosten yksiselitteistä tulkittamista.

Toinen merkittävä Abrahamin muotoa tukeva koe on Shen, Yun ja Fengin valokuitukoe vuodelta 2008 [32]. Kokeessa piioksidinen nanokuitu, eli ohueksi venytetty valokuitu, asetettiin suljettuun kammioon siten, että se roikkui painovoiman vuoksi suorana, alapää vapaana ilmassa. Kuidun läpi ajettiin lyhyitä valopulseja, ja kuidun liikettä mitattiin valon siitä poistuessa. Mikäli valon liikemäärä olisi kuidun sisällä pienempi kuin sen poistuessa jälleen ilmaan, liikemääräero jäisi kuidun liikemääräksi, eli työntäisi kuitua valon etenemissuuntaa vastaan. Vastaavasti, mikäli liikemäärä olisi kuidussa suurempi kuin ilmassa, kuitu työntyisi valon etenemissuuntaan. Mitauksissa havaittiin, että valopulssin poistuttua kuiturakenteesta alun perin suora kuitu taipui keskeltä kaarelle, ja tämän jälkeen suoristui jälleen. Ilmiön tulkittiin johtuvan ylöspäin, eli valon etenemissuuntaa vastaan, vaikuttavasta voimasta kuidun loppupäässä. Tämä tulkittiin edelleen todisteeksi siitä, että valon liikemäärä kuidun sisällä olisi Abrahamin muotoa. Koetta kritisoitiin [33, 34] tiukin sanoin sekä itse koeasetelman puutteellisuudesta, että tulosten teoreettisesta tulkinnasta. Erityisesti Iver Brevikin kommentissa [34] tuotiin esiin, että mikäli kuidun loppupäähän kohdistuu valon etenemissuuntaan vaikuttava venyttävä voima, sitä seuraisi aineen elastisuuden vuoksi myös vastakkaissuuntainen palautusvoima. Täten pelkästä kuidun kaarelle taipumisesta ei voida päätellä valon aiheuttaman voiman suuntaa vaan ainoastaan se, että poistuessaan valo kohdistaa kuituun voiman. Kuitu venyy

vain vähän ja ilmiö on todella lyhytkestoinen, joten tarkan venymäprosessin huomaamatta jääminen hitaaseen kuluttajakameraan pohjaavalla mittausasetelmalla on varsin todennäköistä.

### 3.4 Massa-aaltoteoria

Yhdeksi ratkaisuksi Abraham-Minkowskin liikemääräristiriitaan on ehdotettu, että molemmat liikemäärämuodot olisivat omalla tavallaan oikeassa, mutta ne kuvaisivat eri ilmiöitä valon ja aineen vuorovaikutuksessa. Ginzburg [35] argumentoi, että eri muodot ovat seurausta eri tavoista jakaa kenttä-aine-kokonaisuus erilaisiin osasysteemeihin, mistä seuraa eriävät yhtälöt energian jatkuvuudelle ja sitä kautta liikemäärälle. Tällöin pelkän kaavan (86.2) liikemäärätiheyden lisäksi tulisi Abrahamin tensoria käytettäessä ottaa huomioon erillinen mekaaninen liikemäärätiheys  $\bar{\mathbf{g}}_A^{mech}$ , joka vaikuttaa väliaineeseen itseensä. Täten Abrahamin ja Minkowskin muotojen välillä ei olisi niinkään ristiriitaa, vaan yhteys [20, 22]

$$\bar{\mathbf{g}}_A + \bar{\mathbf{g}}_A^{mech} = \bar{\mathbf{g}}_M. \quad (94)$$

Barnett [24] esitti teoriasta kaavan (95) mukaisen yleisemmän muodon, jossa väliaineeseen liittyvä liikemäärä on jaettu edelleen väliaineen mekaaniseen, eli kineettiseen, liikemäärään  $\bar{\mathbf{p}}_{VA}^{kin.}$  ja kanoniseen liikemäärään  $\bar{\mathbf{p}}_{VA}^{kan.}$ .

$$\bar{\mathbf{p}}_{VA}^{kin.} + \bar{\mathbf{p}}_A = \bar{\mathbf{p}}_{VA}^{kan.} + \bar{\mathbf{p}}_M. \quad (95)$$

Mallissa väliaineen kineettinen liikemäärä vastaisi väliaineen liikettä tämän altistuessa valolle ja kanoninen liikemäärä puolestaan kvanttimekaanisia rotaatioprosesseja, joissa aine ei varsinaisesti siirry vuorovaikutuksen myötä.

Baxter ja Loudon puolestaan näyttivät [4, 23] kvanttimekaanisen Lorentzin voiman laskemisen kautta, kuinka puoliäärettömässä kiteessä fotonivetoilmiön kokonaisliikemäärämuutokseksi saadaan

$$P_{tot} = \frac{\hbar\omega}{c} \left\{ \overbrace{\left( \frac{n_p^2 + 1}{2n_p} - \frac{1}{n_g} \right)}^{rajapinta} + \overbrace{\left( \frac{1}{n_g} - n_p \right)}^{kide} + \overbrace{\widehat{n_p}}^{varaus} \right\}, \quad (96)$$

missä  $n_p$  on taitekerroin aallon vaihenopeudelle ja  $n_g$  ryhmänopeudelle. Vaihenopeus kuvaa valon vaiheen värähtelyn etenemistä paikan suhteen ja ryhmänopeus sitä, millä nopeudella valopulssi konaisuutena etenee. Näistä vain ryhmänopeus voidaan mitata. Kaavassa (96) ensimmäinen termi vastaa rajapintaa, jolla fotoni tulee kiteeseen sisään, toinen termi vaikutusta kiteeseen kokonaisuuutena, ja viimeinen kiteen varausten kokemaa vaikutusta. Tällöin Abrahamin  $1/n$ -muoto kyllä vaikuttaa kiteen sisällä tapahtuviin prosesseihin, mutta liikemäärän kokonaismuutosta mitatessa vaikutukset jäävät summauksen myötä piiloon. Malli on käytännössä sama kuin edellä kuvattu Barnettin esittämä: Minkowskin muoto korostaa kineettistä liikemäärää, joka on vuorovaikutuksen lopputuloksesta helppo mitata, kun taas Abrahamin muoto liittyy lähinnä kanoniseen liikemäärään, ja jää siksi piiloon.

Partanen et al. [6] esittivät liikemäärän jakautumisteoriasta mallin, jossa väliaineessa kulkevaa fotonia kuvataan massallisena kvasipartikkelina (MP, mass-polariton). Kulkiessaan fotoni kytkeytyy väliaineen atomeihin, ja MP-kvasipartikkelin massa tulee siitä, etteivät kytkeytymisen myötä aineen massaominaisuudet ja fotonin kenttäominaisuudet enää ole toisistaan irrallisia käsitteitä. Kvasipartikkelin massa on siis vain osa väliaineen kokonaismassasta, eikä suinkaan niin, että fotoni kuljettaisi mukanaan aineeseen lisää massaa. Aineessa kulkiessaan fotoni siirtää samalla väliaineen atomeja paikoiltaan ja aiheuttaa täten mukanaan etenevän massa-aallon, jossa aineen atomit ovat lepotilaa lähempänä toisiaan. Teorian mukaan tämän massa-aallon mukanaan kantama liikemäärä vastaa Abrahamin ja Minkowskin liikemäärämuotojen erotusta, ja MP-kvasipartikkelin liikemäärä  $\bar{\mathbf{p}}_{MP}$  on summa sähkömagneettisen kentän ja massatiheysaallon liikemääristä  $\bar{\mathbf{p}}_{kenttä}$  ja  $\bar{\mathbf{p}}_{MDW}$  (mass density wave, MDW), eli

$$\begin{aligned} p_{MDW} &= \left(n - \frac{1}{n}\right) \frac{\hbar\omega}{c} \\ p_{kenttä} &= \frac{\hbar\omega}{nc} \\ \bar{\mathbf{p}}_{MP} &= \bar{\mathbf{p}}_{MDW} + \bar{\mathbf{p}}_{kenttä}. \end{aligned} \tag{97}$$

Massa-aallon mallintamiseen puolestaan voidaan käyttää jatkuvan aineen dynamiikkaa, joka on laajennos Newtonin mekaniikalle, sekä elastisen aineen malleja. Jatkuvan aineen fysiikassa Newtonin toinen laki ilmaistaan muodossa

$$\begin{aligned} \rho_a(\bar{\mathbf{r}}, t) \frac{d^2 \bar{\mathbf{r}}_a(\bar{\mathbf{r}}, t)}{dt^2} &= \bar{\mathbf{f}}_{opt.}(\bar{\mathbf{r}}, t) + \bar{\mathbf{f}}_{el.}(\bar{\mathbf{r}}, t) \quad \text{ja} \\ \rho_a &= \rho_0 + \rho_{rek}(\bar{\mathbf{r}}, t) + \rho_{MDW}(\bar{\mathbf{r}}, t), \end{aligned} \tag{98}$$

missä  $\rho_a$  on ajasta  $t$  ja paikasta  $\bar{\mathbf{r}}$  riippuva aineen tiheyden funktio, joka on jaettavissa häiritsemättömään perustila-arvoon  $\rho_0$ , aineen rajapinnalla vaikuttavaan rekyliarvoon  $\rho_{rek}$  ja massatiheysaallon vaikutukseen  $\rho_{MDW}$ . Symboli  $\bar{\mathbf{r}}_a$  kuvaa aineen atomipoikkeamakenttää, ja  $\bar{\mathbf{f}}_{opt.}$  ja  $\bar{\mathbf{f}}_{el.}$  ovat aineessa vaikuttavat optiset ja elastiset voimantiheydet. Voimantiheyksien laskemiseksi ryhmä käytti tuloksia

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{f}}_{opt.}(\bar{\mathbf{r}}, t) &= \frac{\varepsilon_0}{2} \bar{\mathbf{E}}(\bar{\mathbf{r}}, t) \cdot \bar{\mathbf{E}}(\bar{\mathbf{r}}, t) \nabla n^2 + \frac{n^2 - 1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \bar{\mathbf{S}}(\bar{\mathbf{r}}, t) \\ \bar{\mathbf{f}}_{el.}(\bar{\mathbf{r}}, t) &= (B + \frac{4}{3}G) \nabla (\nabla \cdot \bar{\mathbf{r}}_a(\bar{\mathbf{r}}, t)) - G \nabla \times (\nabla \times \bar{\mathbf{r}}_a(\bar{\mathbf{r}}, t)), \end{aligned} \tag{99}$$

missä (99.1) on suoraan Abrahamin muoto (85) tapauksessa  $\nabla \mu_r = \rho = 0$ , eli aine on varauksetonta ja sen magneettinen permeabilisuus pysyy vakiona, ja (99.2) on niin kutsuttu Hooken laki, missä  $B$  on kimmomoduli (eng. *bulk modulus*) ja  $G$  leikkausmoduli (eng. *shear modulus*). Kaavoista (98) ja (99) saadaan differentiaaliyhtälö, josta voidaan ratkaista atomien poikkeamakenttä  $\bar{\mathbf{r}}_a(\bar{\mathbf{r}}, t)$ . Valopulssin poistuttua

väliaineesta atomit ovat jääneet tiettyyn poikkeamatilaan, joka tasaantuu kaavan (100) elastisen aaltoyhtälön kautta.

$$\frac{d^2 \bar{\mathbf{r}}_a(\bar{\mathbf{r}}, t)}{dt^2} = v_{\parallel}^2 \nabla(\nabla \cdot \bar{\mathbf{r}}_a(\bar{\mathbf{r}}, t)) - v_{\perp}^2 \nabla \times (\nabla \times \bar{\mathbf{r}}_a(\bar{\mathbf{r}}, t)) \quad \text{ja} \quad (100)$$

$$v_{\parallel} = \sqrt{B + \frac{4G}{3}}, \quad v_{\perp} = \sqrt{\frac{G}{\rho_0}}.$$

Kaavassa (100)  $v_{\parallel}$  kuvaa valon etenemissuuntaisen puristumisaallon (eng. *compressional wave*) etenemisnopeutta ja  $v_{\perp}$  poikittaissuuntaisen leikkauskimmoisuusaallon (eng. *shear wave*) nopeutta.

Kaavoilla (98–100) voidaan numeerisesti simuloida aineen käyttäytymistä valopulssin kulkiessa sen läpi, ja ennen kaikkea, aineen käyttäytymistä valopulssin siitä poistuttua. Partanen et al. esittelivät tutkimuspaperissaan useita simulaatiotuloksia 800 nm laserpulssin ja timanttihilan vuorovaikutusdynamikasta, sekä pulssin etenemisen ajalta että sen jo poistuttua kiteestä. Simulaatiotuloksissa näkyy, kuinka valopulssin edetessä timantin sisällä kiteen atomit siirtyvät pienen matkan valon kulkusuuntaan. Pulssin poistuttua timantista aineen reunoille jää pullistumat, jotka venyttävän voiman poistuessa alkavat värähdellä palatakseen alkuperäiseen tasapainotilaansa. Tämä reunojen värähtely lähettää venymien tasaantumisaaltoja myös timanttikiteen sisäosiin, ja täten syntyvien atomisiirtymien suuruusluokka on jopa satakertainen itse valopulssin aiheuttamiin siirtymiin nähden.

Luvussa 3.3 kuvatuissa, kuten monissa muissakin kokeissa, Abraham-Minkowskin liikemääräristiriitaa on lähestytty juuri jomman kumman tyyppisten koetulosten kautta: joko reaktioista jatkuvalla kentällä (esim. Walker & Walkerin koe [29, 30, 31]) tai lopputilasta valopulssin jo poistuttua aineesta (esim. Gibson et al. [21]). Valon aiheuttaman aineen sisäisen mekaanisen liikkeen olemassaolo on esitetty jo 1970-luvulla [35], joten onkin erikoista, ettei tämän ilmiön tarkkaa vaikutusta valon ja aineen vuorovaikutusdynamikkaan ole kokonaisuutena arvioitu tarkemmin jo aiemmin.



## 4 Koeasetelma

Tämän diplomityön kokeellisen osuuden tarkoituksena on pyrkiä virtuaalisesti mittaamalla havaitsemaan luvussa 3.4 esitetty massatiheysaalto. Partanen et al. [6] suorittivat ilmiöstä numeerisia simulaatioita virtuaalisessa timanttikidehilassa, mutta nykyfysiikan perusperiaatteiden mukaisesti teorian tueksi vaaditaan myös tosimaailman mittaustuloksia. Simulaatiot toimivat hyvänä esiaskelena varsinaisen kokeen suorittamiselle, sillä niiden kautta saadaan ennakkotietoa muun muassa siitä, miten mittalaitteet tulisi mitoittaa ja millaisia mittaustuloksia kokeelta voisi odottaa. Tässä luvussa esittelen joitakin mahdollisia mittaasetelmiä lyhyesti ja käsittelen näistä diffraktiohilakuidun asetelmaa tarkemmin. Kyseiseen hila-asetelmaan liittyviä numeerisia malleja esitellään luvussa 4.2. Malleilla laskettuja simulaatiotuloksia puolestaan käydään läpi myöhemmin luvussa 5.

### 4.1 Mahdolliset mittaasetelmat MDW-ilmiön havaitsemiseksi

On lukuisia vaihtoehtoisia tapoja lähestyä Partanen et al. esittämän [6] MDW-teorian kokeellista todentamista. Ilmiön skaala on toki kovin pieni, timanttikiteen ja 5 mJ laserpulssein tapauksessa simuloitujen venymien suuruusluokkana oli  $10^{-17}$ – $10^{-15}$  m, mutta sopivan herkällä mittaasetelmalla ja tarkkaan harkituilla suoritustavoilla tämänkin kokoluokan ilmiöiden pitäisi olla havaittavissa.

Houkuttelevin perusmateriaali mittaasetelmien toteuttamiselle on tyypillinen valokuitu, jonka sisään ajetaan valopulsseja. Sopivasti mitoitettuna valokuitu pitää siihen syötetyn valon tehokkaasti sisällään, eikä absorboi sitä juuri lainkaan. Sekä valon etenemismuodon että intensiteetin voidaan siis olettaa pysyvän hyvin tarkasti vakioina tämän kulkiessa kuidun sisällä, mikä heijastuu suoraan esiintyvän MDW:n stabiiliuteen. Samoista syistä myös muut aaltojohteet sopinevat mittaasetelmien perustoiksi, mutta valokuitu on huomattavasti helpompi liittää muuhun mittaasetelmaan ja valonlähteisiin kuin esimerkiksi piikiekolle valmistetut aaltojohteet.

Tekninen haaste on lähinnä siinä, kuinka havaita valokuidun tiheyden muuttuminen valopulssin siinä edetessä? Yksi tapa on tarkastella sitä, kuinka paljon kuidun loppupää työntyy ulospäin valopulssin poistuessa kuidusta. Pulssin työntäessä molekyyliä eteenpäin, tämä johtaa kuidun sisällä pulssin mukana etenevään pakkautumiseen ja kuidun loppupäässä reunan molekyylien ulospäin pullistumiseen. Tämän pullistuman suuruutta voitaisiin arvioida, ja siitä päätellä myös kuidun sisällä tapahtuvien ilmiöiden suuruus. Perusajatus on käytännössä sama kuin Shen, Yun ja Fengin kokeessa [33], mutta kuten Brevik vastauksessaan [34] ehdotti, koejärjestelynä olisi nimenomaan loppupään tarkka analysointi sen sijaan että tutkittaisiin kuidun käytöstä kokonaisuutena.

Yksi tapa loppupäädyn liikkeen tarkasteluun olisi käytännössä juurikin Brevikin ehdottama "*rummunkalvoasetelma*", eli että kuidun loppupää kytkettäisiin sopivan tyyppiseen kiihtyvyysmittariin. Kuidun loppupään pullistumat liikuttaisivat kiihtyvyysmittaria edestakaisin syklisesti, ja tämä liike voitaisiin havaita mittarin lukemista. Valopulssien syöttötahtia vaihdellessa pullistumaa voitaisiin joko vahvis-

taa tai heikentää, riippuen tämän värähtelytahdistista ja siitä, millä tavalla ennustetut valoa vastaan liikkuvat, venymiä tasaavat massatiheysaallot kuidun sisällä liikkuvat. Esimerkiksi sopivaan tahtiin syötetyillä pulsseilla pulssin aiheuttama MDW saattaisi olla vastakkaisessa vaiheessa kuidun loppupäästä palaavan tasautumisaallon kanssa, jolloin se katoaisi ennen kuin se ehtii kuidun loppupäähän. Tällöin mittari ei saisi lisä kiihtyvyyttä, mikä näkyisi mittaustuloksissa. Tahtiominaisuuksista voitaisiin siis päätellä monia asioita MDW-teorian ilmenemisestä kuidun sisällä ja sen ulkoreunalla. Käytännön ongelmina asetelmassa on lähinnä riittävän pienen kiihtyvyydsmittarin valmistaminen ja kytkeminen kuidun päähän ja mittaustulosten keräyslaitteistoon. Kuidun ja mittarin rajapinnalla tulee olla heijastuksenestokerros, jottei valon heijastuminen tuo ylimääräistä liikemääräpanosta mittarin liikkeeseen, ja pahimmassa tapauksessa interferoi seuraavan valopulssin kanssa. Tämä kerros puolestaan saattaa jossain määrin vaimentaa pullistuman ilmenemistä mittarilla, mikä helposti vääristäisi tuloksia. Mittausasetelman pitäisi siis kyllä olla teknisesti toteutettavissa, mutta se vaatii monella osa-alueella erityistä tarkkaavaisuutta.

Toinen vaihtoehtoinen tapa "*rummunkalvoasetelman*" toteuttamiselle on se, että kuidun loppupää kytketään joko kondensaattorilevyjen väliin tai käämin sisälle. Kuidun venyessä valopulssin siitä poistuessa, kuidun määrä kyseisen sähkökomponentin sisällä muuttuu. Määrän muutos puolestaan näkyisi kondensaattorin kapasitanssin tai käämin induktanssin muutoksena, riippuen koeasetelmavalinnasta. Tästä muutoksesta voitaisiin sitten kääntäen arvioida sitä, paljonko kuitu valopulssin poistuessa venyi. Mahdolliseksi ongelmaksi asetelmassa saattaa muodostua ulkoisten sähköisten kenttien huomioiminen, ja piirin kenttien takaisinkytkytyminen, kuten Walkerin ja Walkerin kokeessa [29]. Venymän suuruus on oletettavasti hyvin pieni, joten myös siitä seuraavat kapasitanssin ja induktanssin muutokset ovat pieniä. Tämä tarkoittaa sitä, että koeasetelma on helposti todella häiriöaltis.

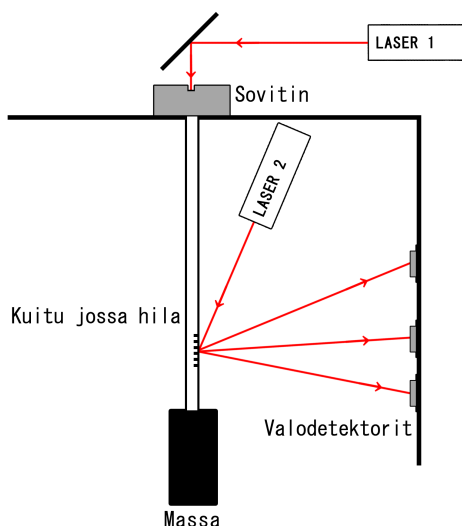
Vaihtoehtoisesti voidaan myös mitata MDW:n vaikutuksia suoraan tämän ollessa yhä kuidun sisällä. Yksi tapa tämän toteuttamiseen olisi se, että kuituun upotettaisiin metallisia nanopartikkeleita, joiden plasmoniominaisuudet riippuvat voimakkaasti niiden välisestä etäisyydestä. Massatiheysaallon saapuessa partikkelien kohdalle, se työntäisi näitä hetkellisesti lähemmäs toisiaan, mikä havaittaisiin plasmoniominaisuuksien muutoksena. Itse valopulssin vaikutus partikkeleihin voitaisiin eliminoida mitoittamalla ne siten, ettei valopulssin taajuus vastaa mitään näiden resonansitaajuuksista. Ongelmana asetelmassa on lähinnä se, että toisiinsa kytkeytyvien metallisten nanopartikkelien upottaminen valokuidun sisälle ilman, että kuidun perusmuoto kärsii, ja siten että näiden ominaisuuksia voidaan kuidun ulkopuolelta helposti mitata, on mitä todennäköisimmin haastava toimenpide.

Toinen vaihtoehto kuidunsisäisen MDW:n havaitsemisasetelmaksi on se, että kuidun ulkopinnalle luodaan diffraktiivinen hila. Hilan tuottamien diffraktiomaksimien paikat riippuvat voimakkaasti hilan elementtien mitoista. MDW:n työntäessä kuitua kasaan, se vaikuttaa oletettavasti myös kuidun ulkopintaan ja siten diffraktiohilan mittoihin. Tämä mittojen muutos olisi sitten edelleen havaittavissa hilan synnyttämien diffraktiomaksimien ominaisuuksissa. Suurimpana yksittäisenä ongelmana asetelmassa lienee se, että diffraktiomaksimien tuottamiseksi hilaa tulee valaista ulkoapäin erillisellä valonlähteellä, mikä saattaa häiritä kuidun sisällä kulkevaa MDW:tä. Tämä

vaihtoehto kuitenkin valittiin esitetyistä asetelmista yksinkertaisimmaksi, ja otettiin siksi tarkempaan tarkasteluun. Asetelman yksityiskohtia ja mahdollisia ongelmia tarkastellaan yksityiskohtaisemmin luvussa 4.2.

## 4.2 Menetelmät ja mallit

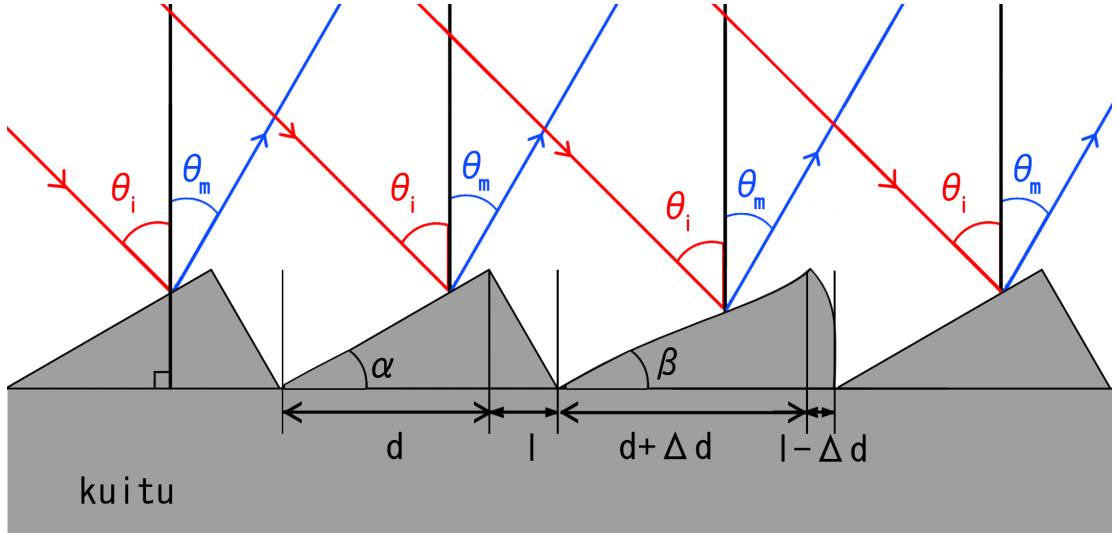
Tässä työssä simuloitavassa kokeessa massa-aallon havaitsemiseksi käytetään valokuitua, jonka pintaan on esimerkiksi etsaamalla valmistettu diffraktiivinen hila. Hilaa ulkoa päin valaistessa siitä heijastuu varjostimelle useita diffraktiomaksimeja, joiden esiintymiskulmat riippuvat valonlähteestä, valaisukulmasta ja hilan mitoista. Valokuidun sisälle lähetetään toista reittiä pitkin valopulsseja, jotka etenevät kuidun läpi valoa absorboivaan massa- aallon. Massan tarkoitus on paitsi estää takaisinheijastumiset kuidun loppupäästä, myös pitää kuitu suorana. Mikäli kuidun sisällä kulkeva valopulssi aiheuttaa siihen luvun 3.4 mukaisen massatiheysaallon, aallon pitäisi vaikuttaa myös kuidun osana olevan hilan muotoon. Diffraktiomaksimien ominaisuudet riippuvat voimakkaasti hilan mitoista, joten pienet muutokset esimerkiksi lovitheydessä vaikuttavat huomattavissa määrin mitattavaan diffraktiomaksimiin. Yksinkertaistettu kaaviokuva mittausasetelmasta on esitetty kuvassa 3.



Kuva 3: Massatiheysaallon mittausasetelma.

Kuvassa 3 LASER 1 on massatiheysaallon aiheuttava pulssitettu laser, joka ajetaan sovitinkappaleen kautta kuidun sisälle, ja LASER 2 diffraktiohilan ominaisuuksien mittaamiseen käytettävä laser. Valodetektorit mittaavat hilasta siroavien diffraktiomaksimien sijaintia ja intensiteettiä.

Diffraktiohilassa tapahtuvien venymien suuruuden arvioimiseksi muodostettiin yksinkertaistettu diffraktiomalli, jonka kannalta oleelliset parametrit on esitetty kuvassa 4. Kuvan 4 mukaisessa mallissa  $\theta_i$  (kuvassa punaisella) on tulevan valon



Kuva 4: Malli yksittäisen hilaelementin venymiselle.

tulokulma kuidun pintanormaaliin nähden,  $\theta_m$  (kuvassa sinisellä) diffraktiokulma,  $\alpha$  vääntymättömän hilaelementin nousukulma ja  $\beta$  vastaava kulma elementissä jota massatiheysaalto on venyttänyt  $\Delta d$  verran pidemmäksi. Ennen massatiheysaaltoa kussakin hilaelementissä on  $d$  pituinen nousuosuus, jota seuraa  $l$  pituinen laskuosuus. Tällöin vääntymättömästä hilasta syntyy vahvistavan interferenssin vuoksi diffraktiomaksimit yleisesti tunnetusta diffraktioyhtälöstä määritettävissä oleviin kulmiin  $\theta_m$ . Diffraktioyhtälö vääristymättömälle hilalle on esitetty kaavassa (101) [36].

$$m\lambda = (d + l) [\sin(\theta_i) \pm \sin(\theta_m)], \quad m \in \mathbb{Z}, \quad (101)$$

missä  $\lambda$  on tulevan valon aallonpituus ja merkit määräytyvät niin, että  $+\sin(\theta_m)$  vastaa normaalia heijastuskulmaa  $\theta_i - \alpha$  suurempia kulman  $\theta_m$  arvoja ja  $-\sin(\theta_m)$  tätä pienempiä. Mallissa oletetaan, että tuleva valo on approksimoitavissa tasoaaltona, mikä on normaaleilla lasereilla valaistessa perusteltua kun valaisuala on hilan kokonaismittoihin nähden suuri.

Hilan elementtien koon muutosta mallinnettaessa oletetaan, että yksittäinen elementti kompensoi oman venymänsä ainakin hetkellisesti kokonaan itse. Toisin sanottuna kuvassa 4 oikeanpuolimmaisena elementin mitat ja kulmasuureet ( $d$ ,  $l$  ja  $\alpha$ ) pysyvät muuttumattomina, vaikka edeltävän elementin nousuosuus on pidentynyt arvosta  $d$  arvoon  $d + \Delta d$ . Käytännössä siis venymästä seuraava tiivistyminen vaikuttaa massatiheysaallon reunalla vain hilaelementin  $l$ -pituisen loppuosuuteen. Oletus on ainakin tiettyinä ajanhetkinä perusteltu, ja myöhemmin malli laajennetaan myös ympäröivien elementtien kokomuutokset käsittäväksi. Venymän arvioidaan myös olevan niin pieni, ettei se tiheyden muutoksen kautta vaikuta oleellisesti aineen permittiivisyyteen ja permeabiliteettiin, ja sitä kautta heijastusominaisuuksiin.

Kaavan (101) muoto hilan diffraktiolle olettaa, että kaikki hilaelementit ovat keskenään identtisiä, eikä sitä siksi voi suoraan soveltaa tapaukseen, jossa yksi tai useampi elementistä on venynyt muita pidemmäksi tai supistunut pienemmäksi.



Kun hilassa on  $N \in \mathbb{N}$  d+l-pituista hilaelementtiä, kaava (102) voidaan yleistää m. elementille kaavan (103) muotoon.

$$y_m(x) = (x - x_m) \tan(\alpha_m) + \Delta y_m$$

$$\varphi_m(x) = \frac{2\pi}{\lambda} \left[ (x - x_m) \frac{\sin(\theta_i - \alpha_m)}{\cos(\alpha_m)} + x_m \sin(\theta_i) + \frac{\Delta y_m}{\cos(\theta_i)} \right], \quad (103)$$

$$x_m \leq x \leq x_{m+1}, \quad m \in \mathbb{Z}, \quad 0 \leq m \leq (N - 1),$$

missä  $x_m$  on tarkasteltavan hilaelementin juuren x-koordinaatti ja  $x_{m+1}$  tämän nousuosuuden päätepisteen x-koordinaatti.  $\alpha_m$  on elementtikohtainen nousukulma. Venymättömälle hilalle  $x_m = m(d+l)$  ja  $\alpha_m$  on vakio. Pinnan pistemäisistä säteilylähteistä kukin lähettää palloaallon, jonka sähköinen potentiaali on pisteessä  $\bar{\mathbf{r}} = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}$  aikakeskiarvoistettuna kaavan (104) muotoa [36].

$$U(\bar{\mathbf{r}}) = U_0 \frac{e^{j(\bar{\mathbf{k}} \cdot \bar{\mathbf{r}} + \varphi(x))}}{|\bar{\mathbf{r}}|}, \quad (104)$$

missä  $U_0$  on kentän vakio muotoinen lähtöamplitudi ja  $\bar{\mathbf{k}}$  aaltovektori, jolle  $|\bar{\mathbf{k}}| = 2\pi/\lambda$ . Pisteestä  $(x_1, y_1, z_1)$  säteilevän kentän vaikutus on pisteessä  $(x_0, y_0, z_0)$  kaavan (105) mukainen [36].

$$U(x_0, y_0, z_0) = \frac{U_0}{\sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2}} e^{j \left[ \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2} + \varphi(x) \right]}. \quad (105)$$

Varjostimen pisteessä  $(x_0, y_0, z_0)$  kokonaiskenttä  $U_{tot}(x_0, y_0, z_0)$  on summa kaikista hilan pallokentistä, eli jos hilan ensimmäinen alkio alkaa pisteestä  $(x=0, y=0, z=-L)$  ja viimeinen päättyy pisteeseen  $(x=N(d+l), y=0, z=+L)$ , eli hilaelementit ovat z-akselin suhteen symmetrisiä ja  $2L$  levyisiä, kokonaiskentälle saadaan kaavan (106) lauseke.

$$U_{tot}(x_0, y_0, z_0) = U_0 \frac{-j}{\lambda} \int_0^{N(d+l)} \int_{-L}^L \frac{e^{j(\bar{\mathbf{k}} \cdot \bar{\mathbf{r}} + \varphi(x))}}{|\bar{\mathbf{r}}|} dz dx$$

$$= U_0 \frac{-j}{\lambda} \sum_{m=0}^{N-1} \left[ \int_{x_m}^{x_{m+1}} \int_{-L}^L \frac{e^{j \left\{ \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{(x-x_0)^2 + (y_m(x)-y_0)^2 + (z-z_0)^2} + \varphi_m(x) \right\}}}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y_m(x)-y_0)^2 + (z-z_0)^2}} dz dx \right]. \quad (106)$$

Käytännön mitta-asetelmassa valodetektorit sijaitsevat huomattavan kaukana suhteessa hilan pinnalla tapahtuviin korkeusvaihteluihin, ja samaten mitattavat interferenssimaksimit ovat kooltaan pieniä hilan ja varjostimen väliseen etäisyyteen nähden. Toisin sanottuna,  $y_0 \gg y_m$ ,  $x$ ,  $z$ . Tällöin voidaan käyttää niin kutsuttua Fraunhoferin approksimaatiota [36] kaavalle (106), ja kokonaiskentälle saadaan kaavassa (107) esitetty, venymädynamiikan kannalta yleisempi ja laskennallisesti yksinkertaisempi

muoto, joka ratkeaa suljetussa muodossa.

$$\begin{aligned}
U_{tot}(x_0, y_0, z_0) &= U_0 \frac{-j e^{j \frac{2\pi}{\lambda} y_0}}{\lambda y_0} e^{j \frac{\pi}{\lambda} (x_0^2 + z_0^2)} \sum_{m=0}^{N-1} \left[ \int_{x_m}^{x_m + d_m} e^{-j \varphi_m(x)} \int_{-L}^L e^{-j \frac{2\pi}{\lambda y_0} (x_0 x + z_0 z)} dz dx \right] \\
&= U_0 \frac{-j e^{j \frac{2\pi}{\lambda} y_0}}{\pi z_0} e^{j \frac{\pi}{\lambda} (x_0^2 + z_0^2)} \sin \left( 2\pi \frac{z_0 L}{\lambda y_0} \right) \sum_{m=0}^{N-1} \left[ \int_{x_m}^{x_m + d_m} e^{-j \left( \frac{2\pi}{\lambda y_0} x_0 x + \varphi_m(x) \right)} dx \right] \\
&= U_0 \frac{\lambda e^{j \frac{\pi}{\lambda} (2y_0 + x_0^2 + z_0^2)}}{2\pi^2 z_0} \sin \left( 2\pi \frac{z_0 L}{\lambda y_0} \right) f_{\Sigma}, \text{ missä} \\
f_{\Sigma} &= \sum_{m=0}^{N-1} \left[ \frac{e^{-j \frac{2\pi}{\lambda} \left[ x_m \left( \frac{x_0}{y_0} - \sin(\theta_i) \right) + \frac{\Delta y_m}{\cos(\theta_i)} \right]}}{\frac{x_0}{y_0} + \frac{\sin(\theta_i - \alpha_m)}{\cos(\alpha_m)}} \left( e^{-j \frac{2\pi}{\lambda} \left[ \frac{x_0}{y_0} + \frac{\sin(\theta_i - \alpha_m)}{\cos(\alpha_m)} \right] d_m} - 1 \right) \right].
\end{aligned} \tag{107}$$

Kaavassa (107) integroinnin yläraja  $x_{m+1}$  on korvattu yleisemmällä termillä  $x_m + d_m$ , sillä se mahdollistaa useampien erilaisten venymätilanteiden laskemisen, ja hilaelementit kattava summalauseke on tiivistetty termiin  $f_{\Sigma}$ . Venymättömän tai tasaisesti siirtyneen hilan tapauksessa  $d_m = d$ . Mainittakoon, että vaikka varsinainen korkeustermi  $y_m(x)$  jääkin kaavasta (107) pois, ei tämä tarkoita etteikö hilan korkeusvaihtelu näkyisi havaittavassa kentässä: korkeuden vaihtelu näkyy yhä vaihetermin  $\varphi_m(x)$  kulmariippuvuuksissa, kaavassa (103.2) esitetyllä tavalla. Mitattavissa oleva kokonaisintensiteetti  $I_{tot}$  on kaavan (108) muotoa [36].

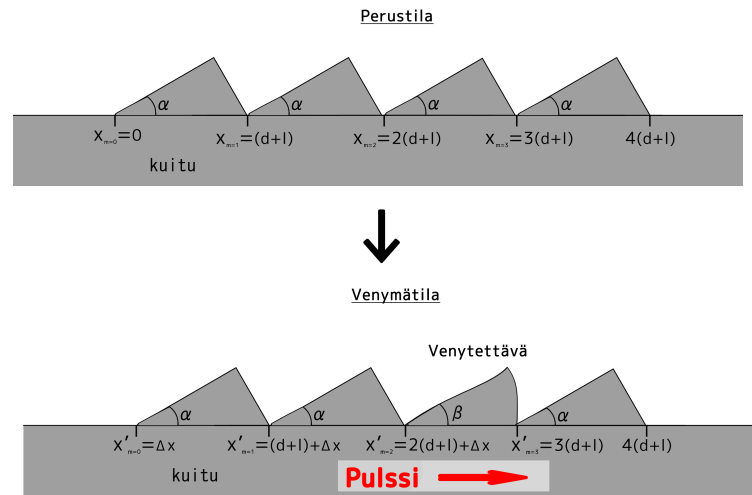
$$\begin{aligned}
I_{tot}(x_0, y_0, z_0) &= |U_{tot}(x_0, y_0, z_0)|^2 \\
&= U_{tot}(x_0, y_0, z_0) \cdot U_{tot}^*(x_0, y_0, z_0),
\end{aligned} \tag{108}$$

missä  $U_{tot}^*(x_0, y_0, z_0)$  on kompleksikonjugaatti termistä  $U_{tot}(x_0, y_0, z_0)$ .

Sekä kaava (106) että (107) voidaan laskea numeerisesti, käyttäen kaavan (103) lausekkeita hilaelementtikohtaisille nousukulmille ja vaihe-eroille. Aiemmin mainituista syistä approksimatiivinen muoto (107) on useimmissa tapauksissa suotuisampi. Käytännössä tietokoneella numeerisesti laskettaessa mallilla voidaan ottaa huomioon useita erilaisia skenaarioita, ilman että laskentaan kuluva todellinen aika kasvaa merkittävästi. Esimerkiksi nousukulma  $\alpha_m$  ja elementin pituus  $d_m$  voidaan määrittää kullekin hilaelementille erikseen, jolloin voidaan mallintaa massatiheysaallon eri vaiheita ja mahdollisia etenemistapoja. Ongelmana on lähinnä sen hahmottaminen, kuinka hila ylipäättään tulee venymään, eikä niinkään se, etteikö MDW:n aiheuttamien venymien vaikutusta interferenssikuvioon voitaisi laskea.

Koska hilaelementit ovat sekä valokuidun halkaisijaan että kuidun sisällä kulkevaan valopulssiin nähden pieniä, lienee mielekästä olettaa että kuidun kokonaisvenymät dominoivat hilaelementtien muotovääristymien yli. Toisin sanottuna oletetaan, etteivät hilaelementit käyristy vaan säilyttävät kolmionmallisen perusrakenteensa, ja vain niiden mitat ( $\Delta d$ ,  $\Delta y$ ,  $\alpha_m$ ) ja sijainnit ( $x_m$ ) muuttuvat. Koska MDW:n odotetaan etenevän väliaineessa valon nopeudella  $v_{MDW} = c/n$  ja tasaantumisilmiöiden

kaavassa (100.2) esitetyillä äänen nopeuksilla, lienee myös mielekästä olettaa, että valopulssin yhä kulkiessa hilan läpi venytettävää elementtiä edeltävät elementit pysyisivät paikoillaan siirrettyssä paikassaan. Toisin sanottuna oletetaan, että valopulssi kulkee kuidun läpi niin nopeasti, etteivät hilaelementit ehdi siirtyä enempää kuin sen verran, mitä valopulssin mukanaan kantama MDW niitä alkuperäiseltä paikaltaan työntää. Tällöin sekä venytettävän elementin että tätä edeltävien elementtien alkupisteet olisivat siirtyneet saman verran, venytettävää elementtiä seuraavien elementtien alkupisteet olisivat ennallaan, ja venytettävä elementti on ainoa jonka nousuosuuden pituus poikkeaa alkuarvostaan, siten että kokonaispituus on kuitenkin yhä  $d+l$ . Tilannetta on havainnollistettu kuvassa 6.



Kuva 6: Malli valopulssin etenemisen aikaisille venymille.

Vaikeampi tapaus on tilanne, jossa valopulssi on jo edennyt pois hilan läheisyydestä, ja kuitu alkaa palautua alkutilaansa tasaantumisaaltojen kautta. Tällöin hilan rakenne riippuu olennaisesti tasaantumisaaltojen rakenteesta, eikä oletus elementtien tasapituusisuudesta välttämättä pidä enää paikkansa. Varmin ja yleisin tapa on määrittää elementtikohtaiset alkupiste- ja pituusarvot. Pulssin etenemisen aikana käytetty malli, jossa venyvä hila kompensoi venymisensä laskevan loppupäänsä kokoonpuristumisella, oli aallon etenemistavan vuoksi vähintään hetkellisesti perusteltu, mutta yleisissä venymätapauksissa näin ei voida enää olettaa. Tasaantumisvenymä on prosessina paljon hitaampi kuin valopulssin aiheuttama poikkeama, joten se vaatii myös erilaisen mallin venymien käsittelylle.

Oletettavasti tasaantumisaallon aallonpituus on yksittäisen hilaelementin pituuteen nähden suurehko. Tällöin tilannetta voitaisiin mallintaa niin, että kukin elementti olisi venynyt nimenomaan kokonaisuutena tietyn verran, samalla työntäen tai vetäen vierustovereitaan mukanaan. Elementin kokonaisvenymä  $d_{m,tot}$  on jakautunut tasaisesti pituusyksikköä kohden, jolloin sen vaikutus säteilevän nousuosuuden pituuteen ( $d_m$  kaavassa (107)) riippuu suoraan venymättömän elementin nousuosuuden pituudesta suhteessa tämän kokonaispituuteen. Tällöin hilaelement-



tien alkupisteille  $x_m$  ja kaavan (107) integraalien ylärajasiirteille  $d_m$ , eli elementtien säteilevän osuuden x-suuntaisille pituuksille, saadaan kaavan (109) muodot.

$$\begin{aligned} x_m &= m(d + l) + \sum_{i=0}^{m-1} d_{i,tot}, \quad m \geq 1 \\ x_{m=0} &= d_{00} \\ d_m &= d + \left( \frac{d}{d + l} \right) d_{m,tot}, \end{aligned} \tag{109}$$

missä  $d_{m,tot}$  on hilaelementtikohtainen kokonaisvenymän arvo ja  $d_{00}$  kuvaa sitä, paljonko kuitu on venynyt juuri ennen ensimmäistä hilaelementtiä.

On mahdollisuus, että käytettävässä mallissa hilan muovautumis- ja säteilyominaisuusoletusten paikkansapitävyyttä suuremmaksi ongelmaksi muodostuu se, että massatiheysaallon mittaamiseksi ylipäätään käytetään kuidun pinnassa sijaitsevaa optista diffraktiohilaa: MDW-teorian mukaan myös hilan valaisemiseen käytettävä valo aiheuttaa kuituun massatiheysaaltoja, jotka saattavat häiritä kuvan 3 LASER 1 aiheuttamia kuidun sisäisiä aaltoja, joita hilalla pyritään mittaamaan. Ongelmaan on mittaamenetelmän vaihtamisen lisäksi useita eri ratkaisuvaihtoehtoja.

Ilmeisin ratkaisu on käyttää hilan valaisuun niin pienitehoista laseria, ettei sen synnyttämä MDW vaikuta oleellisesti mitattavan aallon ominaisuuksiin. Ratkaisun heikkoutena on se, että tällöin myös varjostimelle syntyvien intensiteettimaksimien voimakkuudet heikkenevät huomattavasti, jolloin erot hilan normaalitilan ja venymien välillä tasaantuvat. Ongelma on tosin kierrettävissä käyttämällä riittävän herkkiä valodetektoreita, mutta tällöin mittaustulokset ovat myös alttiimpia häiriöille, kuten kuidun sisältä vuotavalle valolle. Kuidun osana olevan diffraktiohilan käyttö nimittäin edellyttää, että kuitu on vähintään hilan alueelta kuorruttamaton, jolloin kuidun sisällä kulkeva moodi vuotaa valoa myös kuidun ulkopuolelle, mikä häiritsee diffraktiokuvion mittaamista.

Toisena vaihtoehtona on käyttää hilan valaisemiseen jatkuva-aaltoista laseria, ja valaista diffraktiohilaa niin pitkään ennen varsinaisen MDW-pulssin saapumista, että kiteessä vallitsee aallon saapuessa tasapainotila. Tällöin massatiheysaallon saapuessa diffraktiohilan kohdalle se kohtaa vain kidehilan, jolla on jokseenkin erilaiset ominaisuudet kuin muualla kuidussa, mutta joka on silti tasapainotilassa. MDW aiheuttaa tähän poikkeamaan lisäpoikkeaman, joka näkyy edelleen hilan diffraktiokuviossa. Riskinä ratkaisussa on kuidun lämpeneminen jatkuvan valaisun seurauksena, jolloin atomien terminen liikehdintä kuidun sisällä saattaa vaikuttaa massatiheysaallon etenemiseen. Ilmiö voidaan kuitenkin ottaa huomioon vertailemalla eri pituisilla ennakkovalaisuaajoilla saatavia intensiteettituloksia.

Kolmas vaihtoehto on käyttää hilan valaisemiseen useita eri tulokulmia  $\theta_i$ , ja mahdollisesti jopa läpäisyhilaa, jossa valo syötetään hilaan kuidun vastakkaiselta puolelta. Tällöin diffraktiohilan valaisusta syntyvän MDW:n etenemissuunta ja siten myös vuorovaikutustavat mitattavan aallon kanssa vaihtelevat systemaattisesti, ja mittaaslaserin vaikutuksen suuruutta kokonaistilanteeseen voidaan arvioida.

Vaihtoehtona on myös käyttää raakaa voimaa, eli laskea diffraktiolaserin kuituun aiheuttama lisämassatiheysaalto samoilla luvussa 3.4 kuvatuilla menetelmillä kuin

kuidun sisällä kulkeva MDW. Syntyvän ylimääräisen aallon vaikutukset varsinaiseen aaltoon voidaan laskea ja tarkastella täten syntyvän summa-aallon vaikutuksia diffraktiohilan venymisominaisuuksiin. Ratkaisu on kuitenkin laskennallisesti raskas ja aikaavievä, eikä siksi yhtä suositeltava kuin aiemmin mainitut. Lisäksi mikäli hilan sivusuuntaisesta valaisusta aiheutuva summa-aalto eroaa niin paljon oletetusta MDW:stä, ettei sitä yllä mainituilla muilla menetelmillä voida ottaa huomioon, todennäköisesti myös hilan venymämekanismi ovat toisenlaisia kuin kuvan 3 mukaisessa mallissa, eivätkä tässä työssä esitetyt mallit ole sellaisinaan käyttökelpoisia.

## 5 Simulaatiotulokset

Tässä luvussa esitellään simuloituja tuloksia, joita saatiin luvussa 4.2 esitetyillä numeerisilla malleilla. Simulaatiot jaettiin kahteen osaan: ensimmäiseen vaiheeseen, jossa valopulssi kulkee diffraktiohilan ohi, ja vaiheeseen, jossa pulssi on jo poistunut kuidusta ja syntyneet venymät alkavat tasaantua aaltomaisella liikkeellä. Vaiheista ensin mainittua käsitellään luvussa 5.1 ja jälkimmäistä luvussa 5.2. Kummassakin tapauksessa diffraktiohilan valaisemiseen käytettävän valon aallonpituus ja tulokulma, hilaelementtien z-suuntainen leveys, nousukulma, ja etäisyys varjostimesta pidettiin vakioina. Valon aallonpituus oli 635 nm, tulokulma  $\pi/3$ , elementtien leveys oli 100  $\mu\text{m}$ , nousukulma sama kuin valon tulokulma, ja etäisyys varjostimesta 0,5 m. Vaihdeltavina suureina käytettiin yksittäisen hilaelementin x-suuntaista pituutta, lukumäärää ja MDW:n sekä palautumisaallon aiheuttamien venymien suuruuksia.

Elementin laskuosuuden x-suuntainen pituus pidettiin prosentuaalisesti vakiona siten, että sen arvo oli kuudesosa nousuosuuden pituudesta. Esiintyvien venymien suuruuksina käytettiin pulssin etenemisvaiheessa arvoja 5 pm, 0,5 nm ja 1 nm, ja tasaantumisaaltovaiheessa aallon huippuarvoina näiden satakertaisia arvoja 0,5 nm, 50 nm ja 100 nm. Varsinaista ennakkotietoa todellisissa mittauksissa esiintyvien venymien suuruusluokista ei ollut, joten etenemisvaiheen luvut valittiin melko mielivaltaisesti siten, että ne kattaisivat suuren skaalan erilaisia pituuksia. Tasaantumisaaltojen huippuarvon satakertaisuus puolestaan otettiin suoraan Partanen et al. [6] simulaatiotuloksista timantissa, joissa tasaantumisaallot olivat voimakkuudeltaan noin satakertaisia valopulssin aiheuttamiin venymiin nähden. Venymien ja tasaantumisaallon keskinäinen suuruusero saattaa olla lasikuidussa täysin eri kuin timantissa, mutta satakertaisuus lienee silti hyvä alkupiste simulaatioille.

Elementtipituuksien valinnat ja arvot on esitelty tarkemmin luvussa 5.1. Laskennallisen nopeuden suosimiseksi tarkastelussa keskityttiin 1D-tapaukseen, jossa vain varjostimen  $z_0=0$  cm -janan intensiteettijakauma laskettiin. Syntyvä intensiteettijakauma on kyseisen arvon suhteen peilisymmetrinen ja nopeasti heikkenevä, mikä näkyy paitsi täysistä 3D-simulaatioista, myös kaavan (107)  $z_0$ -riippuvuudesta. Simulaatiot toteutettiin MATLAB-ohjelmointikielellä. Laskentaan käytetty koodi kommentteineen on esitetty liitteessä A.

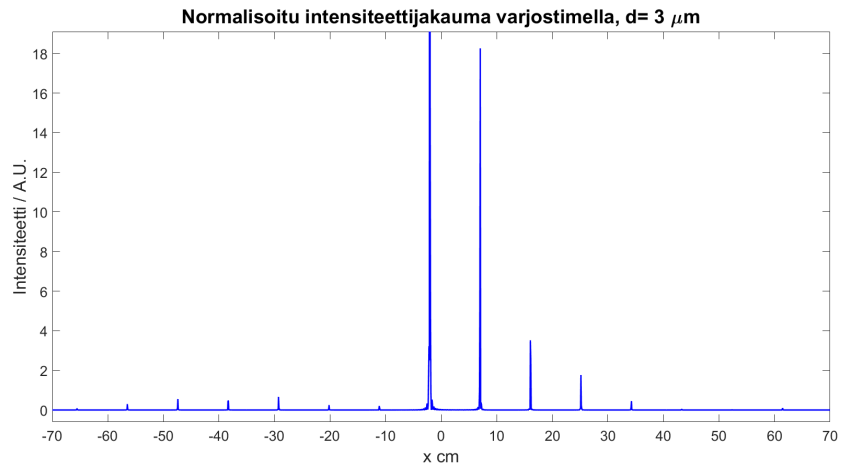
### 5.1 Valopulssin eteneminen hilan läpi

Ennen varsinaisia simulaatioita pyrittiin selvittämään, mikä voisi olla optimaalinen x-suuntainen pituus yksittäiselle hilaelementille. Tuntuu luontevalta ajatella, että mahdollisimman pieni elementtipituus olisi vaihtoehtoista paras, sillä tällöin MDW:n aiheuttamat pienet venymät aiheuttaisivat prosentuaalisesti suuremman muutoksen elementin mittoihin ja täten myös hilasta syntyvään diffraktiokuvioon. Toisaalta pienten elementtien valmistaminen on teknisesti haastavampaa kuin suurten, ja lisäksi yksittäisen elementin pinta-alan pieneneminen tulee kompensoida valmistamalla hila, jossa näitä pieniä elementtejä on lukumäärällisesti enemmän. Muutoin varjostimelle saapuva kokonaisintensiteetti heikkenee huomattavasti, mikä hankaloittaa mittauksia.

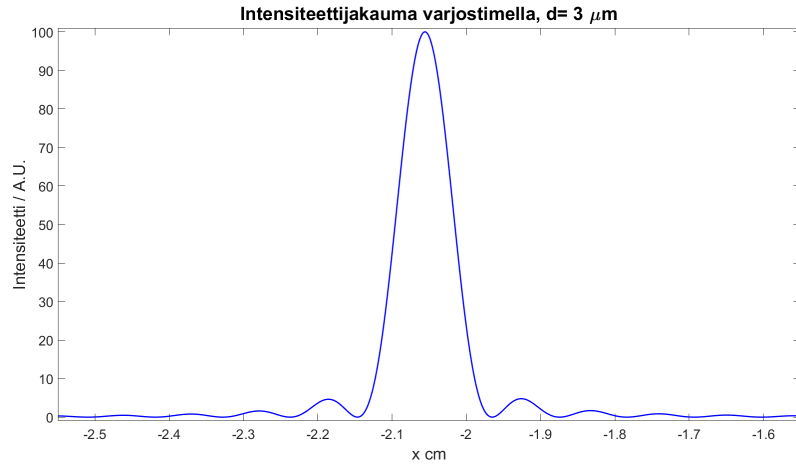
Optimointi suoritettiin tarkastelemalla prosessin ensimmäistä vaihetta, jossa

valopulssi kulkee hilan läpi. Aluksi tarkasteltiin ilmiön yleisiä ominaisuuksia, eli sitä millä tavoilla pulssin ylipäättään voisi odottaa muuttavan hilan synnyttämää diffraktiokuvioa.

MDW-mittauksen ensimmäinen vaihe on se, kun kuidun sisällä etenevä valopulssi saavuttaa diffraktiohilan ja työntää tämän elementtejä paikoiltaan. Kuten luvussa 4 todettiin, tässä työssä käytetty malli olettaa että tämä aallon aiheuttama työntymä on suuruudeltaan kohtuullisen pieni yksittäisen hilaelementin kokoon nähden. Ensimmäisenä kokeilukappaleena käytettiin hilaa, jossa yksittäisen elementin noususuuden pituus oli  $3\text{ }\mu\text{m}$ . Kyseisestä hilasta syntyvä vääristymätön interferenssikuvio on esitetty kuvassa 7 ja kohdan  $x \approx -2\text{ cm}$  päämaksimi tarkemmin kuvassa 8.



Kuva 7: Intensiteettijakauma varjostimella tapauksessa  $d=3\text{ }\mu\text{m}$ .

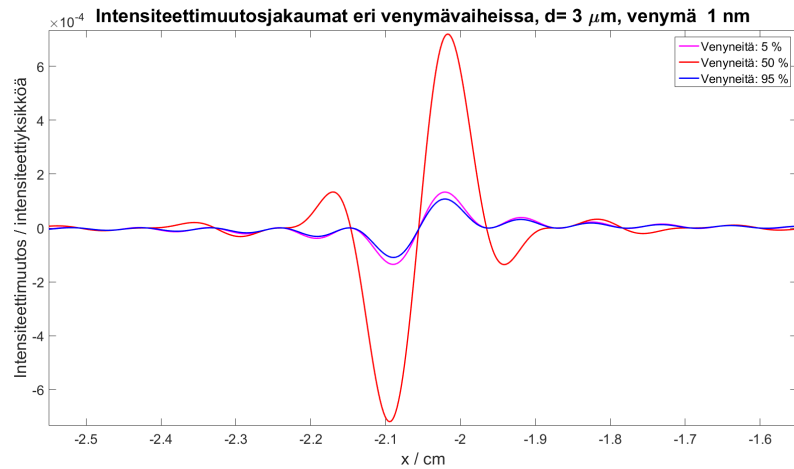


Kuva 8: Simuloitu interferenssikuvio, venymätön tapaus.

Kuvasta 7 nähdään selvästi, että maksimiarvojen paikat vastaavat tarkasti kaavan (101) ennustamia sijainteja. Pystyakseli on normalisoitu siten, että korkein arvo

vastaa akselilla arvoa 100. Myös kuva 8 on skaalattu samalla tavalla. Kuva 7 on rajattu pystysuunnassa, jotta myös sivumaksimit olisivat erotettavissa. Kuvassa 8 nähdään selvästi, kuinka maksimin juuressa esiintyy pieni-intensiteettistä aaltoilua, kuten interferenssi-ilmiöissä tiedetään tapahtuvan.

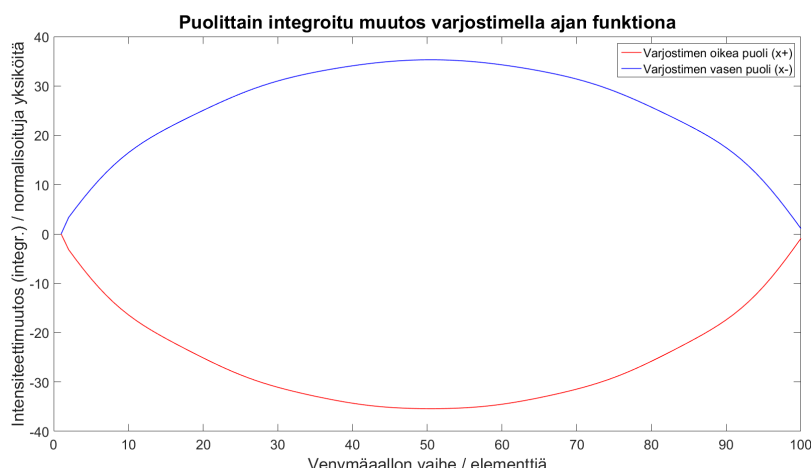
Kuvassa 9 on esitetty intensiteettijakauman muutos, kun hilan läpi kulkee ensimmäinen MDW-pulssi, joka siirtää kutakin hilaelementtiä paikaltaan. Siirtymän  $\Delta d$  arvoksi asetettiin 1 nm, joka on Partanen et al. ryhmässä käytettyihin venymäarvoihin nähden suuri. Etenkin ensimmäisen simulaation pääasiallisena tarkoituksena on kuitenkin antaa lähinnä kvalitatiivista ymmärrystä siitä, kuinka interferenssikuvion voisi odottaa käyttäytyvän kun kuitu vuorovaikuttaa valopulssin kanssa. Tarkoituksena ei siis ole tuottaa tarkkoja lukuarvoja joita mittareilta olisi odotettavissa varsinaisessa koetilanteessa.



Kuva 9: Simuloitu intensiteettimuutosjakauma eri ajanhetkinä.

Kuvasta 9 nähdään, kuinka venymäaallon ollessa puolessavälissä hilaa, intensiteettimaksimi on siirtynyt jonkin verran oikealle, x-akselilla positiiviseen suuntaan. On huomioitava, ettei kuvan skaala ole sama kuin kuvassa 7, sillä prosentuaalisia muutoksia merkityksellisempiä ovat intensiteetin absoluuttiset muutokset. Tuloksen intensiteetti  $U_0$  on normitettu arvoon 1, ja interferenssikuvion intensiteetit ovat tämän kanssa samassa skaalassa. Kuvassa magenta viiden prosentin käyrä peittyy lähes kokonaan sinisen 95 % käyrän alle. Erityisesti animoiduissa simulaatiotuloksissa nähdäänkin, kuinka intensiteettimuutos on symmetrinen 50 % vaiheen suhteen: kun vain pieni osa hilaelementeistä on venyneitä, muutos intensiteettijakaumassa on odotetusti pieni, ja toisaalta pulssin jo kuljettua hilan läpi, hila on muutoin sama kuin alussakin, mutta se on siirtynyt  $\Delta d$  verran eteenpäin. Siirtymän  $\Delta d$  ollessa pieni, myös intensiteettikuvion kokonaismuutos tulee olemaan pieni. Kuvassa 10 on esitetty kuvan 8 käyrän integraalifunktion arvo, siten että tarkastelu on jaettu alkuperäisen intensiteettimaksimin huipun mukaan kahteen puoliskoon.

Kuvassa 10 ylempi sininen käyrä kuvaa huippuarvon vasemman puolen muutosta, ja alempi punainen käyrä oikean puolen. Kuvasta nähdään, että integroidut muutokset ovat paitsi aallon etenemisvaiheen, myös muutoksen arvon suhteen symmetrisiä,



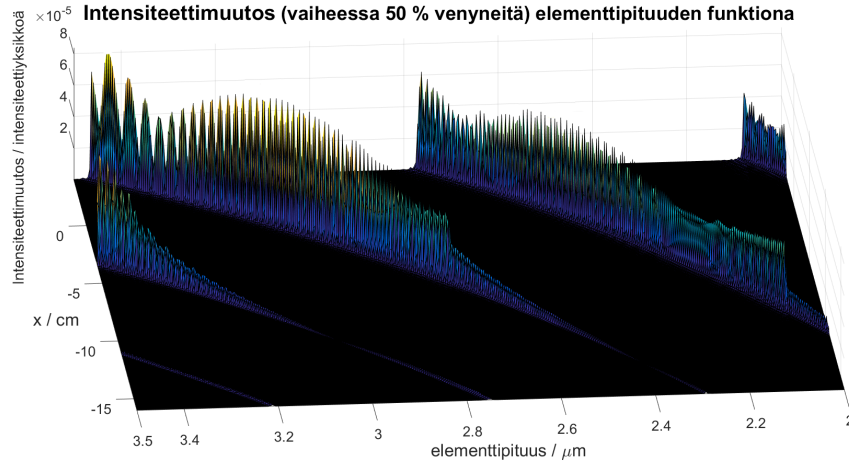
Kuva 10: Simuloitu intensiteettijakauman muutos ajan funktiona.

eli tarkasteltavan interferenssimaksimin muoto ei muutu dramaattisesti vaan se lähinnä vain siirtyy varjostimella. Tilannetta voikin ajatella niin, että aallon edetessä hilassa, hila jakautuukin kahdeksi erilliseksi diffraktiohilaksi, joiden välissä on yksi yksittäinen elementti joka ei kuulu näistä kumpaankaan. Nämä kaksi hilaa ovat mitoiltaan samanlaisia, mutta ne sijaitsevat hieman eri kohdissa ja niillä on siksi hieman eri vaiheet ja interferenssimaksimien paikat. MDW:n edetessä yhä suurempi osa alkuperäisen hilan elementeistä siirtyy uuden hilan elementeiksi, ja tämän interferenssikuvio vie yhä enemmän ja enemmän energiaa alkuperäisestä. Kuitenkin, kun kaikki hilaelementit ovat siirtyneet uudeksi hilaksi, lopputulos on siirtymän pienuuden vuoksi lähes identtinen alkutilanteen kanssa. Täten muutoksen on oltava suurimmillaan, kun nämä kaksi hilaa kilpailevat tasaväkisesti, eli hilaelementit ovat jakautuneet näiden kesken tasaisesti.

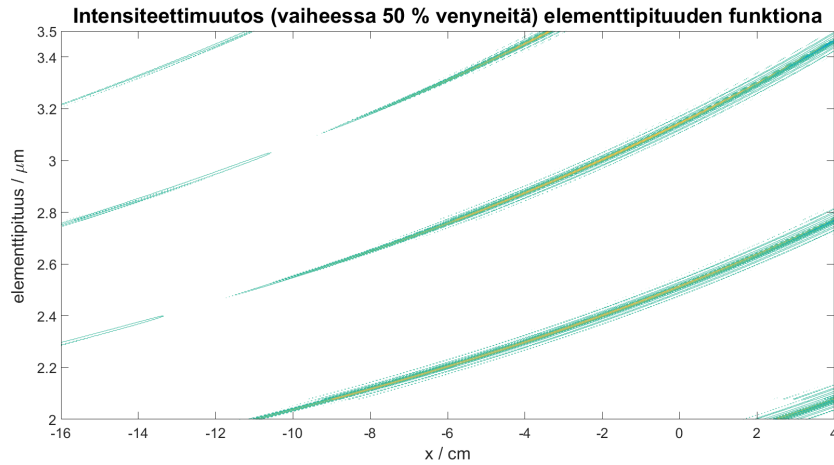
Näiden yleishavaintojen avulla yritettiin etsiä optimaalinen arvo yksittäisen elementin peruspituudelle. Intensiteettijakaumien ja -muutosten laskuun käytetty algoritmi automatisoitiin toistamaan lasku systemaattisesti lukuisilla eri elementtipituuden arvoilla, ja vaiheen, jossa 50 % elementeistä on siirtynyt 1 nm verran paikaltaan, aiheuttamia intensiteettimuutoksia vertailtiin. Laskut toistettiin erinäisillä varjostinkoordinaatti-elementtipituus-arvojoukkopareilla. Elementtien lukumäärä pidettiin vakiona arvossa 100 kpl. Eräs saatu jakauma on esitetty kuvassa 11.

Kuten kuvasta 11 näkyy, intensiteettimaksimien kapean luonteen vuoksi kuvaajista tulee helposti piikikkäitä ja vaikeasti tulkittavia, jopa tarkoilla paikkadiskretisoinneilla. Kuvasta on kuitenkin nähtävissä, kuinka intensiteettimaksimien paikat odotetusti liukuvat varjostimella elementtikoon muuttuessa, ja syntyvillä käyrillä on selvä maksimikohta. Selvemmin tämä näkyy, kun tuloksista otetaan tasapotentialikuvaaja, joka on esitetty kuvassa 12.

Tarkemman yleiskuvan saamiseksi kuvan 12 käyristä valittiin kolme alimmaista sekä kaksi näistä seuraavaa (kuvan ulkopuolella), ja näiden kehitystä tarkasteltiin käsin mitattujen harvemmin sijaitsevien esimerkkipisteiden kautta. Tarkasteluvaiheena oli aiempaan tapaan 50 % venymävaihe, ja venymän suuruutena 1 nm. Saadut tulokset



Kuva 11: Simuloitu intensiteettimuutosjakauma elementtipituuden funktiona,  $d=2,75 \mu\text{ m}$  &  $x_0=-11 \text{ cm}$  ympäristössä.

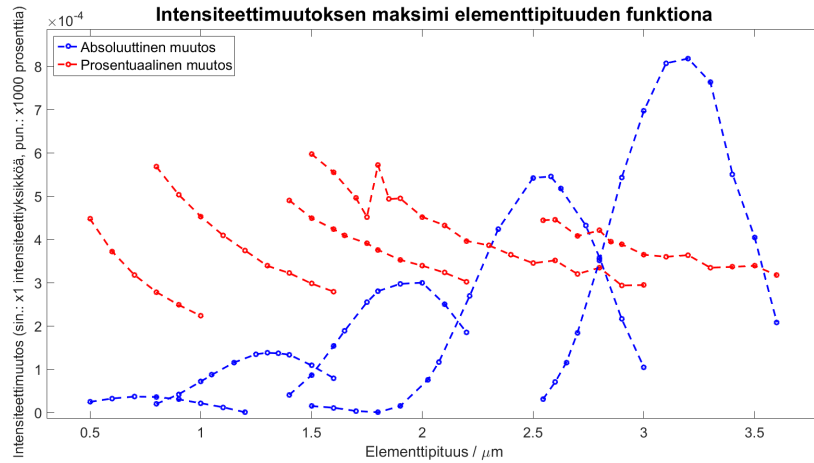


Kuva 12: Kuvan 11 datasta työstetyt tasapotentiaalikäyrät.

on esitetty kuvassa 13.

Kuvassa 13 siniset käyrät kuvaavat intensiteetin arvon muutosta, ja punaiset käyrät sitä, kuinka suuri muutos on suhteessa hilan perustilaan. Sininen data on pystyasteikon mukainen, ja intensiteetin arvot ovat kuten kuvassa 9, kun taas punaiset pisteet on selvyiden vuoksi skaalattu tuhannesosaan alkuperäisistä prosentiarvoistaan. Datajoukot menevät pareittain siten, että päällekkäiset pistejoukot liittyvät toisiinsa.

Kuvasta 13 nähdään selvästi, kuinka sinisten käyrien (intensiteetin muutos) huippuarvot kasvavat elementtikoon kasvaessa. Tämä oli odotettavissa, sillä kuten aiemmin todettiin, elementtikoon kasvaessa myös valoa heijastavan pinnan pinta-ala kasvaa. Tämä näkyy suoraan intensiteetin kasvuna varjostimella. Vertailun vuoksi  $0,75 \mu\text{ m}$  (kuvassa 13 vasemmalta toisen sinisen käyrän maksimi) simulaatio toistettiin



Kuva 13: Eräiden intensiteettimaksimien muutosten kehittyminen elementin peruspituuden funktiona.

siten, että elementtejä oli 100 kappaleen sijaan 400, jolloin hila kattaa x-suunnassa saman alueen kuin 100 kappaletta  $3 \mu\text{m}$  pituisia elementtejä. Elementtien määrä ei vaikuta intensiteettimaksimien paikkoihin tai voimasuhteisiin, vaan näiden leveyksiin varjostimella. Kokeilussa suuremmat elementit tuottivat yhä suuremman muutoksen sekä absoluuttisissa intensiteettiyksiköissä ( $7,2 \cdot 10^{-4}$  ja  $5,95 \cdot 10^{-4}$ ) että suhteellisessa muutoksessa (0,38 % ja 0,30 %), mutta erot tuloksissa olivat huomattavasti pienempiä kuin kuvassa 13. Elementtien pienuudesta aiheutuva heikkeneminen intensiteetissä voidaan siis selvästi kompensoida kasvattamalla elementtien lukumäärää.

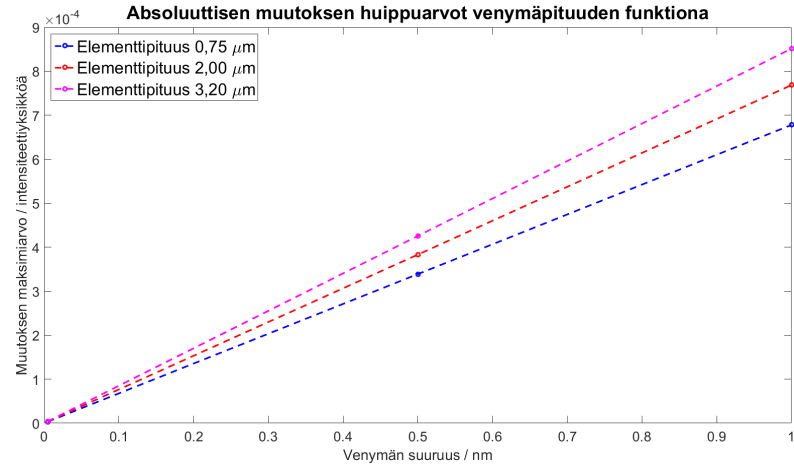
Kuvasta 13 nähdään myös, kuinka venymistä aiheutuvat prosentuaaliset muutokset (punaiset käyrät) toki heikkenevät elementin koon kasvaessa, mutta kukin maksimi vastaa silti prosentuaalisesti noin 0,35 % muutosta. Tulos on yllättävä, sillä äkkiseltään voisi odottaa, että punaisten käyrien taso laskee globaalisti elementtikoon kasvaessa. Toisin sanottuna, että oikeanpuolimmainen punainen käyrä olisi kaikista matalimmalla, ja käyrien sijainti nousisi kuvaajassa vasemmalle siirryttäessä. Näin ei kuitenkaan ole, vaan lähinnä muutosten muutosnopeus pienenee suurempiin elementteihin siirryttäessä.

Kolmas huomionarvoinen seikka kuvassa 13 on se, että kullakin sinisellä pistejoukolla tosiaanakin on oma selvä maksimiarvonsa, kuten kuvat 11 ja 12 antoivat ymmärtää. Pelkkä elementin koon optimointi ei siis riitä, vaan valittu pituus pitää parittaa oikean intensiteettimaksimin kanssa. Simulaatioita ajaessa havaittiin, ettei suurin intensiteettimuutos aina tapahdu siinä maksimissa, jonka intensiteetti on venymättömän hilan tapauksessa suurin.

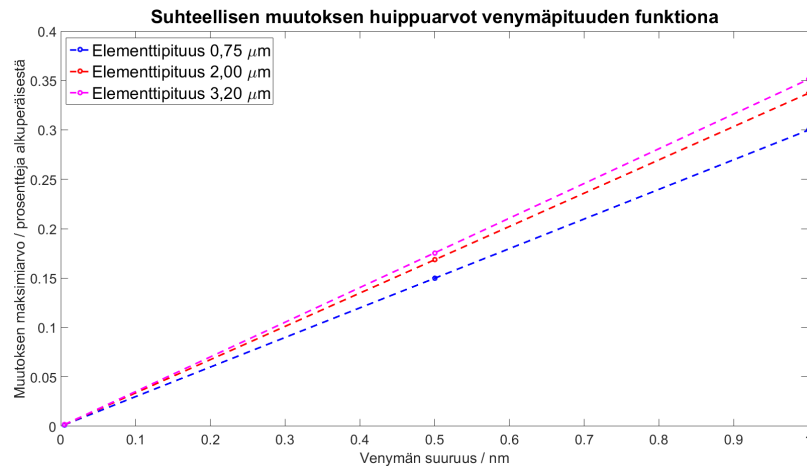
Näiden tietojen perusteella tarkempaan tarkasteluun valittiin elementtipituuslukumäärä-yhdistelmät  $d=3,2 \mu\text{m}$  100 kpl (varjostimella 0,779 cm),  $d=2,0 \mu\text{m}$  160 kpl (varjostimella 2,48 cm) ja  $d=0,75 \mu\text{m}$  427 kpl (varjostimella kohdassa 7,015 cm). Kunkin hilan läpi ajettiin kolmen eri venymäpituuden pulssit, joissa hila venyy yksi elementti kerrallaan vaihtelevissa määrin. Venymien pituudet olivat 5 pm, 0,5 nm ja 1 nm. Intensiteettijakaumat kerättiin kaikista pulssin etenemisvaiheis-



ta, ja näistä koostettiin kuvan 10 kaltaiset integroidut käyrät. Lisäksi mitattiin huippuarvot muutoksista, jotka pulssit aiheuttivat hilan puolessavälissä kulkiessaan. Pulssien aiheuttamien muutosten huippuarvot on esitetty kuvassa 14 ja näiden suhde alkuperäiseen intensiteettiin kuvassa 15.



Kuva 14: Intensiteettimuutoksen huippuarvot venymäpituuden funktiona.

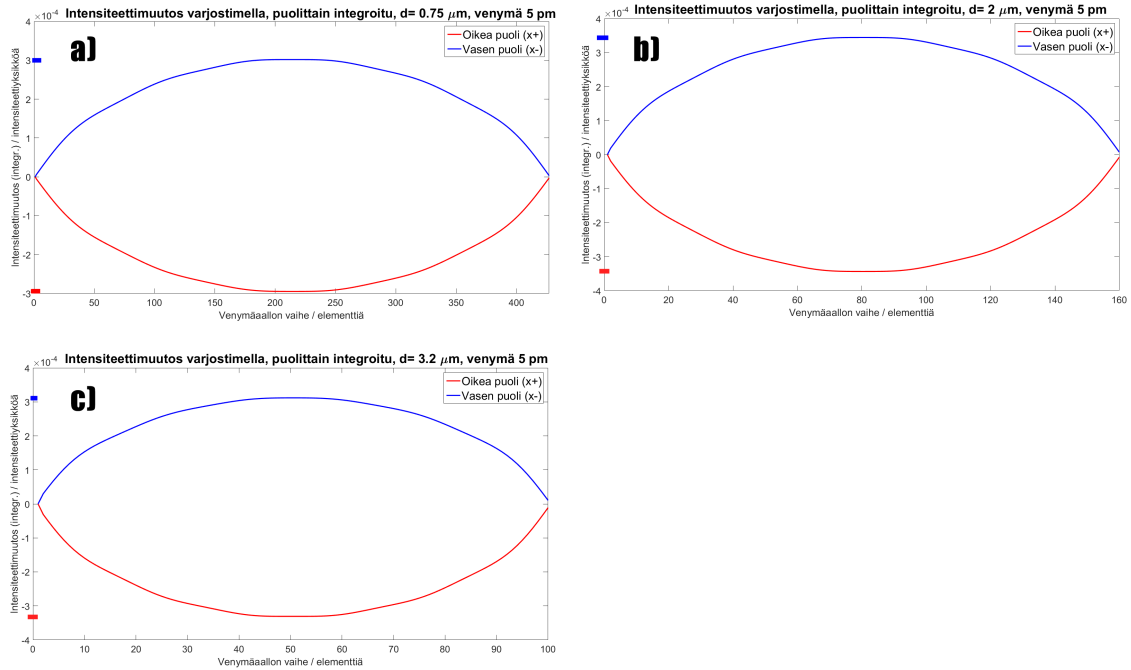


Kuva 15: Muutoksen huippuarvojen suhde alkuperäiseen intensiteettiin venymäpituuden funktiona.

Kuvista 14 ja 15 näkyy selvästi, että sekä absoluuttinen että suhteellinen intensiteettimuutos riippuu lineaarisesti venymän suuruudesta, ja että suuremmilla elementeillä muutos on lukumääräkompensoinnin jälkeenkin voimakkaampaa kuin pienillä elementeillä. Kuitenkin kuvia verratessa havaitaan, että suhteellisen muutoksen suuruus näyttäisi tasaantuvan elementtikoon kasvaessa, sillä 2,0  $\mu\text{m}$  ja 3,2  $\mu\text{m}$  suorien kulmakertoimet ovat paljon lähempänä toisiaan kuvassa 15 kuin kuvassa 14. Tämä on tavallaan nähtävissä myös kuvan 13 punaisten käyrien käytöksessä: suurempien elementtien käyrästoille siirryttäessä punaiset viivat käyvät yhä loivemmiksi

ja loivemmiksi, mikä merkitsee sitä että venymien aiheuttama suhteellinen muutos diffraktiokuvioon tasaantuu.

Lisäksi havaittiin, että vaikka muutosten huippuarvot kasvavat suurempiin elementteihin siirryttäessä, puolittain integroituja muotoja tarkastellessa riippuvuus ei ole yhtä selvä. Varjostimen yli integroidun intensiteetin aikariippuvuudet 5 pm venymätapaukselle on esitetty kuvassa 16.



Kuva 16: Varjostimen yli integroitu intensiteettimuutos ajan funktiona, 5 pm venymätapauksessa. a):  $d=0,75 \mu\text{m}$ . b)  $d=2,00 \mu\text{m}$ . c)  $d=3,20 \mu\text{m}$ .

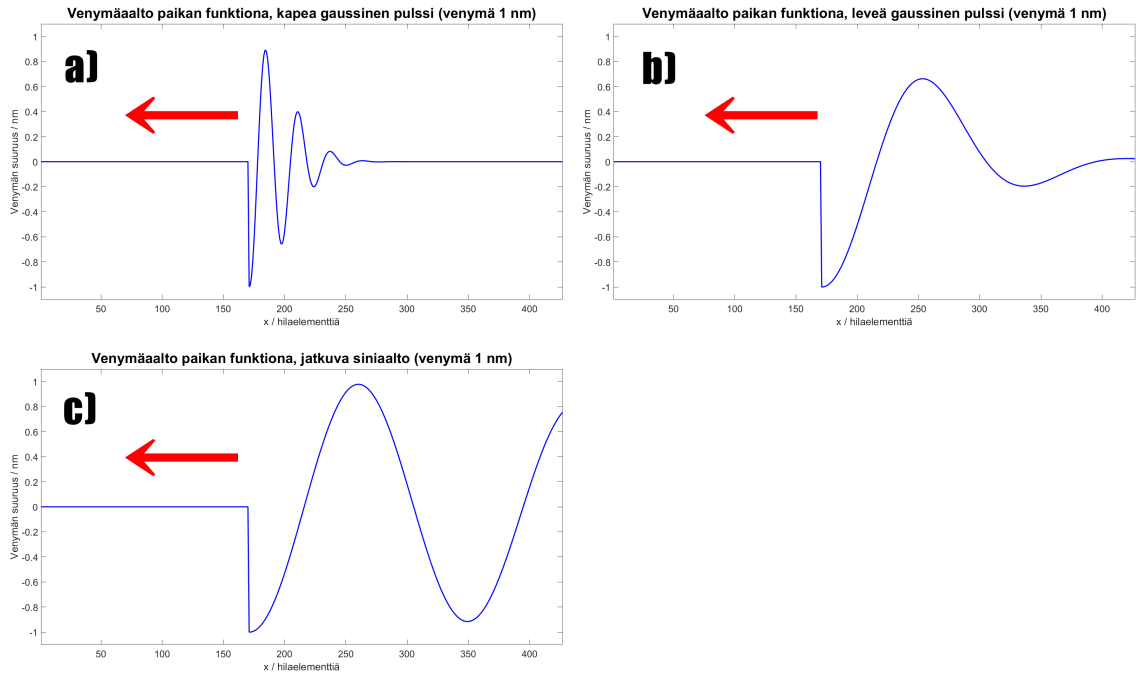
Kuvasta 16 nähdään, että  $2,00 \mu\text{m}$  elementtipituuden tapauksessa integroidun intensiteetin huippuarvot ovat selvästi suuremmat kuin tätä pienemmän  $0,75 \mu\text{m}$  ja suuremman  $3,20 \mu\text{m}$  tapauksissa. Ero ei ole lukuarvoltaan erityisen suuri, mutta silti selvästi havaittava. Kyseisen elementtikoon tapauksessa intensiteettijakauman muutosten on siis oltava huippuarvon ulkopuolella suurempia kuin muilla vertailussa olleilla hiloilla. Integroitu versio kuvaa niitä mittatuloksia joita esimerkiksi nelilohkointensiteettimittarin eri osat keräävät, joten se on lähimpänä mitattavissa olevia arvoja. Onkin siis muistettava, ettei pelkän huippuarvon tarkastelu välttämättä kerro koko totuutta.

## 5.2 Venymien tasaantumisaallot

Valopulssin läpäistyä hilan se jatkaa matkaansa kuidun loppupäässä sijaitsevaan absorboivaan painoon, johon se lopulta imeytyy. MDW-teorian mukaan tämän jälkeen seuraa vaihe, jossa kuidun päädyistä lähtee etenemään uusia massatiheysaalloja, jotka ovat seurausta syntyneiden venymien aiheuttamista jännitteistä. Pulssin poistuttua kuidun loppupää on tavallaan kuin venytetty rummun kalvo, joka päästetään

vapaaksi. Tästä seuraa aaltomaisia venymiä, jotka etenevät kuidun loppupäästä takaisin valon tulosuuntaa kohti. Vastaavia venymiä syntyy toki myös kuidun alkupäässä, mutta yksinkertaisuuden vuoksi tässä työssä käsitellään vain loppupäästä palaavia venymäaaltoja. Tämä vastaa tilannetta, jossa hila sijaitsee suhteellisen lähellä kuidun loppupäättä ja kaukana alkupäästä. Tasaantumisaaltojen odotetaan etenevän äänen nopeudella, toisin kuin luvussa 5.1 esitetyt valopulssin aiheuttamat venymät, jotka etenevät liki valon etenemisnopeudella  $c/n$ .

Ongelmana tasaantumisaaltojen simuloimisessa on se, että sekä aaltojen korkeus (venymien suuruus) että aallonpituus (venymien jakaantuneisuus hilassa) ovat tuntemattomia. Kuten luvussa 5.1 havaittiin, aallon korkeus vaikuttaa lähinnä havaittavien ilmiöiden voimakkuuksiin, mutta aallonpituuden voisi olettaa vaikuttavan myös ilmiön luonteeseen. Täten työssä päädyttiin simuloimaan muutamia eri vaihtoehtoisia aaltomalleja. Aaltomalleina olivat kapea gaussinen aaltopulssi, leveä gaussinen aaltopulssi, ja jatkuva leveäaaltainen siniaalto. Eri pulssimallit on esitetty kuvassa 17.



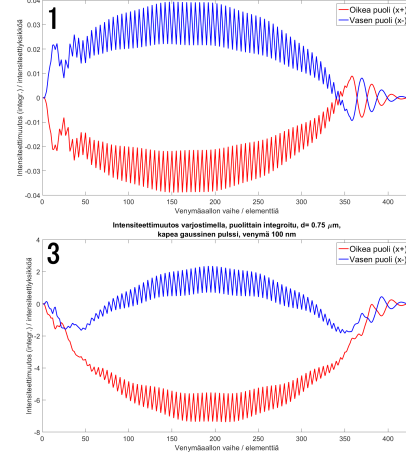
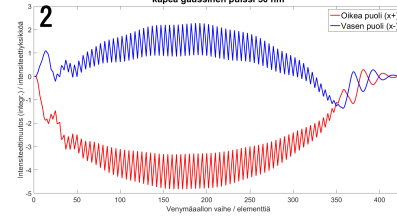
Kuva 17: Eri malliset 1 nm tasaantumisaallot  $0,75 \mu\text{m} \times 427$  kpl esimerkkihilassa, etenemässä punaisten nuolten suuntiin. a): kapea gaussinen pulssi, b): leveä gaussinen pulssi, c): jatkuva siniaalto.

Kuvan 17 pulssit ajettiin luvun 5.1 hilojen ( $0,75 \mu\text{m} \times 427$  kpl,  $2,00 \mu\text{m} \times 160$  kpl ja  $3,20 \mu\text{m} \times 100$  kpl) läpi siten, että kunkin aallon huippuarvoa vaihdeltiin. Pulsien etenemisnopeudet säädettiin gaussisten pulssien (a ja b) tapauksissa siten, että pulssit ehtivät kulkea hilan läpi kokonaan, ja siniaaltopulssin tapauksessa niin, että pulssin etureunan epäjatkovuuskohdan jälkeen hilan ohitti vielä useampi aallonharja. Huomautettakoon, että myös jatkuvan siniaallon mallista pulssia vaimennettiin tämän loppupäättä kohden, mutta vaimennus tehtiin selvästi hitaampaan tahtiin

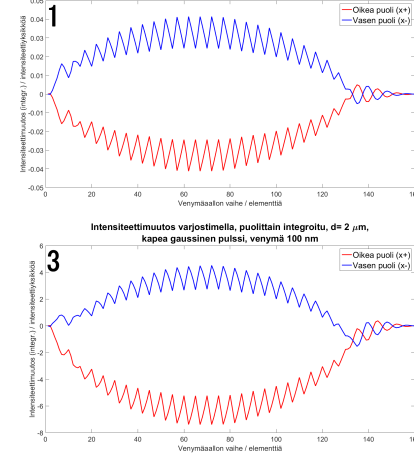
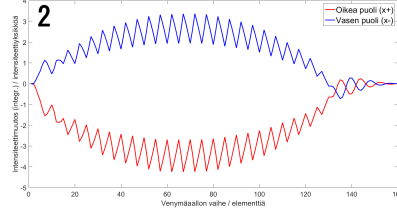
kuin gaussisten pulssien tapauksissa. Venymien huippuarvoina käytettiin pulssivaiheen venymien satakertaisia arvoja 0,5 nm, 50 nm ja 100 nm. Pulssien parametrit skaalattiin hilaelementtimäärän mukaan siten, että näiden aallonpituudet pysyivät reaali maailman mitoissa samanpituisina. Kuten luvussa 5.1, intensiteettimuutosjakaumien kehitystä seurattiin pulssin etenemisen aikana sekä puolittain integroidun muodon että animoidun muutoskäyrän kautta.

Kapeiden gaussisten pulssien (kuva 17a) vaikutukset  $0,75\ \mu\text{m}$  hilaan eri venymäpituuden arvoilla on esitetty kuvassa 18 a), vastaavien pulssien vaikutukset  $2,00\ \mu\text{m}$  hilaan kuvassa 18 b) ja  $3,20\ \mu\text{m}$  hilaan kuvassa 18 c). Kuvia 18a)–18c) verratessa havaitaan, että kaikilla kolmella elementtikoolla kapean gaussisen venymän vaikutus hilaan on pääpiirteissään sama. Pienellä venymän arvolla käyrät pysyvät nollakohdan suhteen symmetrisinä, mikä tarkoittaa sitä, että oikealta puolelta katoava intensiteetti siirtyy suoraan vasemmalle puolelle, eli diffraktiomaksimi vain siirtyy hieman paikaltaan, samaan tapaan kuin valopulssin kulkiessa hilan läpi kuvissa 10 ja 16. Käyrien sahalaitaisuus tarkoittaa sitä, ettei siirtymä tapahdu sulavasti, mikä näkyikin animoiduissa käyrissä intensiteettijakauman nytkähtelevänä liikkeenä. Ilmiö lienee seurausta pulssimuodon epäjatkuvuudesta, sillä oikean puolen loppupäätä kohden käyrät selvästi silottuvat, ja siloittumishetki vastaa sitä kohtaa kun venymäpulssin terävä alkureuna poistuu hilasta. Kuvasta 18 havaitaan myös, että venymän arvon kasvaessa sahalaitavaiheen symmetrisyys siirtyy nollakohdan alle. Toisin sanottuna, intensiteetti kyllä heikkenee varjostimen oikealla puolella, mutta ei kasva vastaavissa määrin vasemmalla. Tämä näkyy intensiteettijakaumassa siten, että maksimi heikkenee samalla kun se siirtyy varjostimella vasemmalle. Huomionarvoista on myös se, että elementtien peruskoon kasvaessa ilmiön vaikutus heikkenee: 50 nm tapauksessa  $2,00\ \mu\text{m}$  hilan muutoskäyrän symmetria-akseli on lähempänä nollaa kuin  $0,75\ \mu\text{m}$  hilan, ja vastaavasti  $3,20\ \mu\text{m}$  hilan lähempänä kuin  $2,00\ \mu\text{m}$ . Toisin sanottuna, tarkasteltavan diffraktiomaksimin intensiteetti heikkenee suuremmilla elementeillä vähemmän kuin pienemmillä.

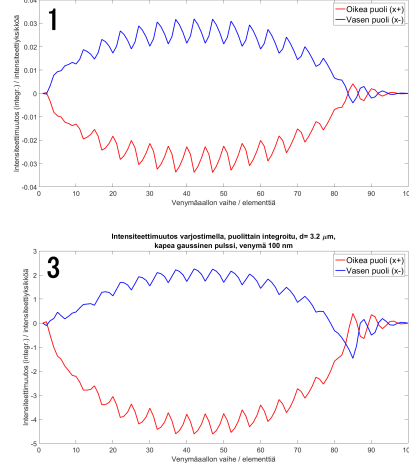
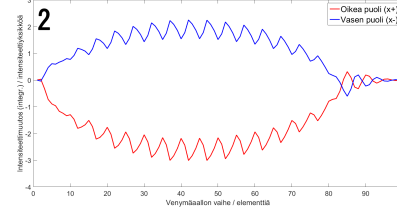
a)

Intensiteetti muutos varjostimella, puolittain integroitu,  $d = 0,75 \mu\text{m}$ , kapea gaussinen pulssi  $0,5 \text{ nm}$ Intensiteetti muutos varjostimella, puolittain integroitu,  $d = 0,75 \mu\text{m}$ , kapea gaussinen pulssi  $50 \text{ nm}$  $d = 0,75 \mu\text{m}$ 

b)

Intensiteetti muutos varjostimella, puolittain integroitu,  $d = 2 \mu\text{m}$ , kapea gaussinen pulssi, venymä  $0,5 \text{ nm}$ Intensiteetti muutos varjostimella, puolittain integroitu,  $d = 2 \mu\text{m}$ , kapea gaussinen pulssi, venymä  $50 \text{ nm}$  $d = 2,00 \mu\text{m}$ 

c)

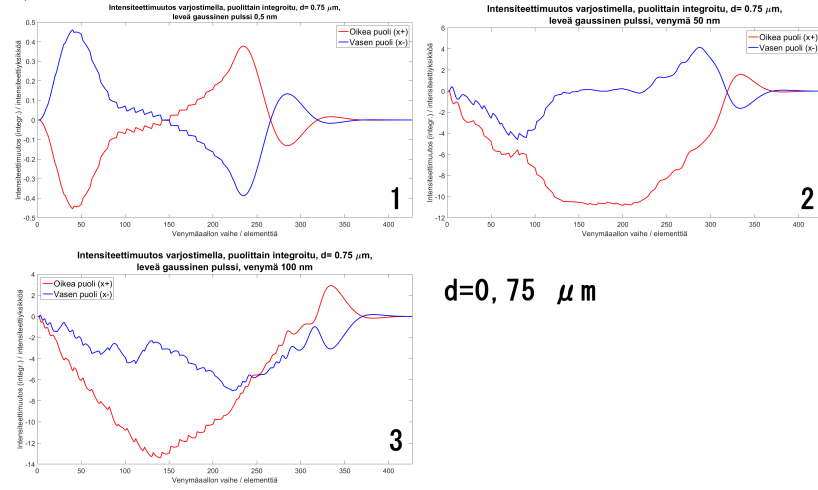
Intensiteetti muutos varjostimella, puolittain integroitu,  $d = 3,2 \mu\text{m}$ , kapea gaussinen pulssi, venymä  $0,5 \text{ nm}$ Intensiteetti muutos varjostimella, puolittain integroitu,  $d = 3,2 \mu\text{m}$ , kapea gaussinen pulssi, venymä  $50 \text{ nm}$  $d = 3,20 \mu\text{m}$ 

Kuva 18: Eri venymäpituuksisisten (1:  $0,5 \text{ nm}$ , 2:  $50 \text{ nm}$ , 3:  $100 \text{ nm}$ ) kapeiden gaussisten tasaantumispulssien vaikutukset eri elementtipituuksisten hilojen intensiteettijakaumiin. a):  $d = 0,75 \mu\text{m}$ , b):  $2,00 \mu\text{m}$ , c):  $3,20 \mu\text{m}$ .

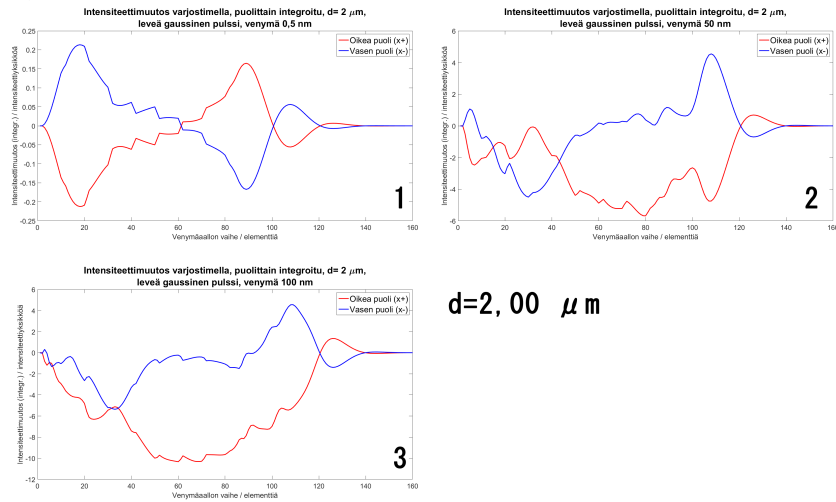
Vastaavat käyrät kuvan 17b) mukaisille leveille gaussisille pulsseille on esitetty kuvassa 19. Kuvasta 19 nähdään kuvien 18a)–18c) ilmiö huomattavasti dramaattisempaa: kaikilla hiloilla pienin 0,5 nm venymä tuottaa samanmallisen muutoskäyrän, mutta jo seuraava, 50 nm venymä tuhoaa 0,75  $\mu\text{m}$  (kuva 19a) ja 2,20  $\mu\text{m}$  (kuva 19b) hilojen tuottamat diffraktiomaksimit täysin, mikä näkyy käyrien voimakkaana pystysuuntaisena epäsymmetriana. Sen sijaan 3,20  $\mu\text{m}$  hila säilyttää 50 nm venymillä maksiminsa rakenteen edes jollain tasolla, joskin muutosprofiili on selvästi erilainen kuin aiemmassa 0,5 nm tapauksessa. 100 nm venymät toki ylittävät 3,20  $\mu\text{m}$  hilankin sietorajan, ja myös tämän intensiteettimaksimi hajoaa aallon aikana käytännössä täysin.

Viimeiseksi testattiin sinimuotoisen pulssin vaikutusta hiloihin, samoilla huipuarvoilla kuin aiemmissakin tapauksissa. Näistä mittauksista saadut tulokset on esitetty kuvassa 20. Kuvissa 20a)–20c) toistuu sama teema kuin kuvan 18 ja erityisesti kuvan 19 tuloksissa. Pienillä 0,5 nm venymillä kuvaajat ovat keskenään samanmalliset, 50 nm venymillä 0,75  $\mu\text{m}$  ja 2,00  $\mu\text{m}$  hilojen diffraktiomaksimit romahtavat täysin ja 3,00  $\mu\text{m}$  hilan maksimi siirtyy varjostimella eri tavalla kuin 0,5 nm venymän tapauksessa. Huomionarvoista sinimuotoisen pulssin muutosominaisuuksissa on se, että intensiteettimaksimin sijainti huojuu selkeästi ja säännöllisesti oikealta vasemmalle, mikä näkyy kuvaajissa punaisen ja sinisen käyrän symmetrisenä risteilemisinä. Käytös on selvästi erilaista kuin kapean gaussisen pulssin tapauksessa (kuva 18), jossa maksimi vain siirtyy vasemmalle ja palaa tämän jälkeen alkupisteeseensä. Leveän gaussisen pulssin (kuva 19) tapauksessa sama ilmiö on nähtävissä, joskin risteämisiä on lukumäärällisesti vähemmän ja niissä on suurempia tapauskohtaisia eroja. Erityisesti siniaallon terävän alkureunan poistumisen jälkeen huojuminen on erittäin tasaista. Reuna poistuu hilan vaikutuspiiristä hieman ennen aika-akselin puoltaväliä, mikä näkyy pienimpien venymätapausten kuvaajissa selvänä käyräristeämisen väliinjäämisinä.

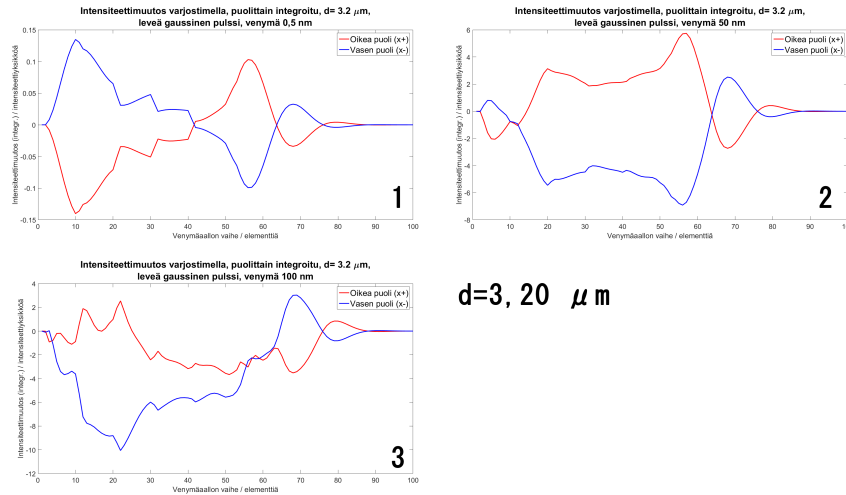
a)



b)

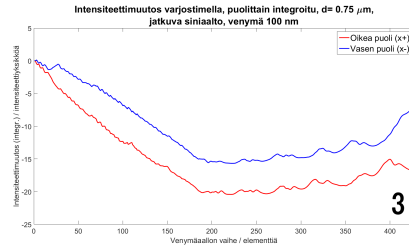
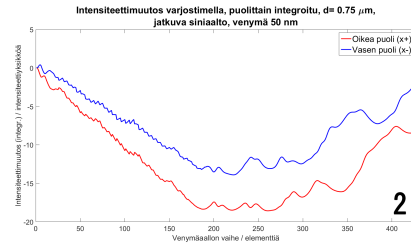
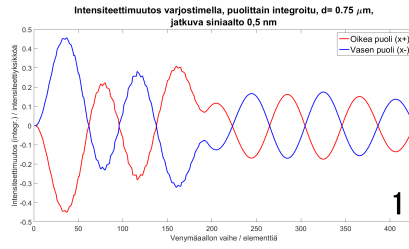


c)

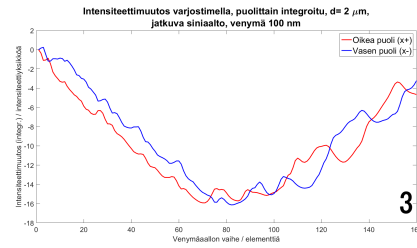
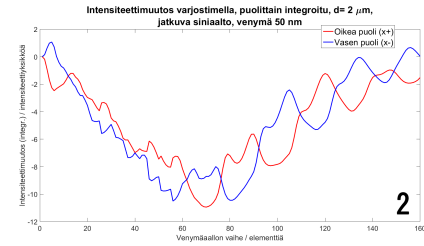
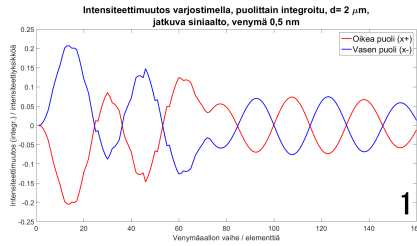


Kuva 19: Eri venymäpituuksisisten (1: 0,5 nm, 2: 50 nm, 3: 100 nm) leveiden gaussisten tasaantumispulssien vaikutukset eri elementtipituuksisten hilojen intensiteetti- ja kaumiin. a):  $d = 0,75 \mu\text{m}$ , b):  $2,00 \mu\text{m}$ , c):  $3,20 \mu\text{m}$ .

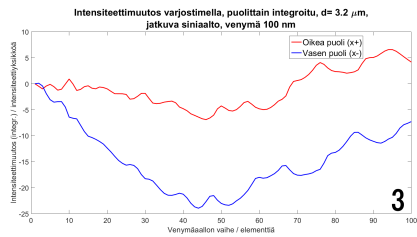
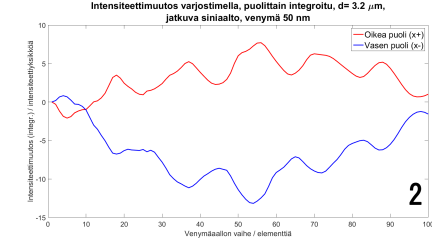
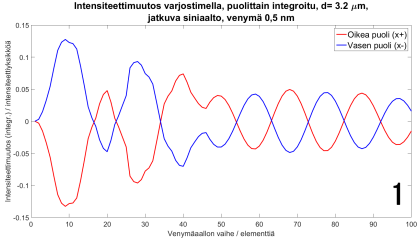
a)

 $d = 0.75 \mu\text{m}$ 

b)

 $d = 2.00 \mu\text{m}$ 

c)

 $d = 3.20 \mu\text{m}$ 

Kuva 20: Eri venymäpituuksisisten (1:  $0.5 \text{ nm}$ , 2:  $50 \text{ nm}$ , 3:  $100 \text{ nm}$ ) sinimuotoisten tasaantumispulssien vaikutukset eri elementtipituuksisten hilojen intensiteettijakau-miin. a):  $d = 0.75 \mu\text{m}$ , b):  $2.00 \mu\text{m}$ , c):  $3.20 \mu\text{m}$ .



Optimaalinen hilaelementin pituus riippuu siis huomattavissa määrin siitä, minkä suuruusluokan venymiä ilmiössä odotetaan ilmenevän. Optimaalinen tilanne olisi kuten  $3,20\ \mu\text{m}$  hilaelementtien  $0,5$  ja  $50\ \text{nm}$  venymien tuottamissa simulaatiotuloksissa, joissa muutosprofiili muuttuu huomattavasti venymäkoon vaihdellessa, mutta kuitenkin siten, että muutos on systemaattista ja alkuperäinen diffraktiomaksimi säilyttää perusmuotonsa jokseenkin hyvin.  $50\ \text{nm}$  aiheuttamat muutokset  $0,75\ \mu\text{m}$  ja  $2,00\ \mu\text{m}$  elementtisiin hiloihin ovat toki suuruudeltaan huomattavia, mutta niistä ei voi päätellä mitään siitä, minkä mallinen tai suuruuksinen pulssi hilan läpi on kulkenut. Liian suuri elementtisten hilojen tapauksessa puolestaan erot eri venymäpituuksien aiheuttamissa muutosprofileissa tasoittuvat, mikä myös hankaloittaa tulosten tulkitsemista.

Seuraavana vaiheena olisikin etsiä kullekin elementtikoolle se venymäsuuruuden raja-arvo, jonka jälkeen diffraktiomaksimin intensiteetti romahtaa tulkintakelvottomaksi. Lisäksi tulisi arvioida, minkä suuruisia tasaantumisvenymiä valokuidulta voisi odottaa, ja sovittaa nämä kaksi parametria yhteen sopivan mallisen hilan valmistamiseksi. Venymäsuuruuden arvon ennustamiseksi voidaan käyttää elastista aaltoyhtälöä kuten Partanen et al. tekivät [6], mutta kyseiset simulaatiot jäävät tämän diplomityön ulkopuolelle. Yleisesti ottaen tulosten suuruusluokat kuitenkin vaikuttavat olevan sellaisia, että hilan venymien aiheuttamat muutokset voitaisiin havaita diffraktiomaksimien paikkaa ja intensiteettiä valodetektoreilla seuraamalla.

## 6 Yhteenveto

Työssä tarkasteltiin valon liikemäärän perusominaisuuksia ja merkityksellisyyttä. Maxwellin yhtälöistä alkava johto valon liikemäärän tyhjiömuotoisille lausekkeille esiteltiin, ja valon kvanttimuotoisten lausekkeiden takana vaikuttavaa historiaa ja matemaattista taustaa käytiin läpi. Valon liikemäärän ja aineen vuorovaikutustapoja käytiin läpi relativistisessa yksittäismolekyyli tapauksessa, ja erityisesti makrota-soon liittyvää ongelmallisuutta käytiin läpi niin kutsutun Abraham-Minkowskin liikemääräristiriidan kautta. Ristiriidan perusominaisuudet käytiin läpi, ja joitakin aiheeseen liittyviä aiempia koeasetelmia ja näihin liittyviä tulkintoja tarkasteltiin yksityiskohtaisemmin. Ristiriidan ratkaisuksi ehdotetun massatiheysaaltoteorian perusominaisuuksia käytiin läpi, ja teorian kokeelliseksi testaamiseksi esitettiin useita vaihtoehtoisia mittausasetelmia. Näistä vaihtoehtoista valokuidun pintaan valmistettavan diffraktiivisen hilan ominaisuuksia ja käyttäytymistä massatiheysaallon sen kanssa vaikuttaessa tarkasteltiin tarkemmin, ja vuorovaikutuksen simuloimiseksi muodostettiin yksinkertaistettu malli. Mallia testattiin tietokonesimulaatioilla, ja simulaatioiden tuloksia ja näiden merkityksiä koeasetelman toteutettavuuden kannalta arvioitiin. Todettiin, että koeasetelman pitäisi olla toteutettavissa myös käytännössä ja ilmiöiden havaittavissa. Jatkotoimenpiteitä ehdotettiin.

## Viitteet

- [1] da Vinci, L., suomentanut Lahdensuu, L. *Leonardo da Vinci työpäiväkirjat*. Teos, 2. painos, 2009, s. 109–110.
- [2] Heidarzadeh, T. The Reception of Newton's Theory of Cometary Tail Formation *Centaurus* vol. 48, nro 1 (2006), s. 50–65.
- [3] Nichols, E. F. ja Hull, G. F. The pressure due to radiation *Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences* vol. 38, nro 20 (1903), s. 559–599.
- [4] Baxter, C. ja Loudon, R. Radiation Pressure and the Photon Momentum in Dielectrics *Journal of Modern Optics* vol. 57, nro 10 (2010), s. 830–842.
- [5] Lebedev, P. N. Untersuchen über die Druckkräfte des Lichtes *Annalen der Physik* vol. 6, nro 11 (1901), s. 433–458.
- [6] Partanen, M. et al. Photon mass drag and the momentum of light in a medium *Physical Review A* vol. 95, nro 6 (2017), s. 063850-1–063850-18.
- [7] Jackson, J. D. *Classical Electrodynamics*. Wiley, 2nd ed., 1975, s. 236–238.
- [8] Planck, M. Ueber das Gesetz der Energieverteilung im Normalspectrum *Annalen der Physik* vol. 4, nro 3 (1901), s. 553–563.
- [9] Einstein, A. ja Hopf, L. Statistische Untersuchung der Bewegung eines Resonators in einem Strahlungsfeld *Annalen der Physik* vol. 33, nro 16 (1910), s. 1105–1115.
- [10] Einstein, A. Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt *Annalen der Physik* vol. 6, nro 17 (1905), s. 132–148.
- [11] Liboff, R. L. *Introductory quantum mechanics*. Addison Wesley, 4th ed., 2003, s. 36–39.
- [12] Einstein, A. On the quantum theory of radiation *The collected papers of Albert Einstein* vol. 6, Doc. 38 (1917), s. 220–233.
- [13] Hooker, S. ja Webb, C. *Laser Physics*. Oxford university press, 1st ed., 2010, s. 12–38.
- [14] Young, H. D. ja Freedman, R. A. *University Physics*. Addison Wesley, 12th ed., 2008, s. 1287–1291.
- [15] Hänsch, T. W. ja Schalow, A. L. Cooling of gases by laser radiation *Optics communications* vol. 13, nro 1 (1975), s. 68–69.

- [16] Minkowski, H. Die Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern  
*Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse* (1908), s. 53–111.
- [17] Abraham, M. Zur Elektrodynamik bewegter Körper  
*Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo* vol. 28, nro 1 (1909), s. 1–28.
- [18] Einstein, A. ja Laub, J. Über einen die elektromagnetischen Grundgleichungen für bewegte Körper  
*Annalen der Physik* vol. 4, nro 8 (1908), s. 532–540.
- [19] Peierls, R. The momentum of light in a refracting medium  
*Proceedings of the Royal Society of London A* vol. 347, nro 1651 (1976), s. 475–491.
- [20] Brevik, I. Experiments in phenomenological electrodynamics and the electromagnetic energy-momentum tensor  
*Physics Reports* vol. 52, nro 3 (1979), s. 133–201.
- [21] Gibson, A. F. et al. A Study of Radiation Pressure in a Refractive Medium by the Photon Drag Effect  
*Proceedings of the Royal Society of London A* vol. 370, nro 1742 (1980), s. 303–311.
- [22] Brevik, I. Photon-drag experiment and the electromagnetic momentum in matter  
*Physical Review B* vol. 33, nro 2 (1986), s. 1058–1062.
- [23] Loudon, R., Barnett, S. M. ja Baxter, C. Radiation pressure and momentum transfer in dielectrics: The photon drag effect  
*Physical Review A* vol. 71, nro 6 (2005), s. 063802-1–063802-11.
- [24] Barnett, S. M. Resolution of the Abraham-Minkowski Dilemma  
*Physical Review Letters* vol. 104, nro 7 (2010), s. 070401-1–070401-4.
- [25] Jones, R. V. ja Richards, J. C. S. The Pressure of Radiation in a Refracting Medium  
*Proceedings of the Royal Society of London A* vol. 221, nro 1147 (1954), s. 480–498.
- [26] Jones, R. V. ja Leslie, B. The Measurement of Optical Radiation Pressure in Dispersive Media  
*Proceedings of the Royal Society of London A* vol. 360, nro 17025 (1978), s. 347–363.
- [27] Danishevskii, A. M. et al. Dragging of Free Carriers by Photons in Direct Interband Transitions in Semiconductors  
*Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics* vol. 31, nro 2 (1970), s. 292–295.

- [28] Grinberg, A. A. Theory of the Photoelectric and Photomagnetic Effect Produce by Light Pressure  
*Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics* vol. 31, nro 3 (1970), s. 531–534.
- [29] Walker, G. B. ja Walker, G. Experimental observation of Abraham force in a dielectric  
*Nature* vol. 253, nro 5490 (1975), s. 339–340.
- [30] Walker, G. B. ja Walker, G. Mechanical forces of electromagnetic origin  
*Nature* vol. 263, nro 5576 (1976), s. 401.
- [31] Walker, G. B. ja Walker, G. An unusual electromagnetic surface force  
*Nature* vol. 265, nro 5592 (1977), s. 324.
- [32] She, W., Yu, J. ja Feng, R. Observation of a push force on the end face of a nanometer silica filament exerted by outgoing light  
*Physical review letters* vol. 101, nro 24 (2008), s. 243601-1–243601-4.
- [33] Mansuripur, M. Comment on “Observation of a Push Force on the End Face of a Nanometer Silica Filament Exerted by Outgoing Light”  
*Physical review letters* vol. 103, nro 1 (2009), s. 019301.
- [34] Brevik, I. Comment on “Observation of a Push Force on the End Face of a Nanometer Silica Filament Exerted by Outgoing Light”  
*Physical review letters* vol. 103, nro 21 (2009), s. 219301.
- [35] Ginzburg, V. L. ja Ugarov, V. A. Remarks on forces and the energy-momentum tensor in macroscopic electrodynamics  
*Soviet Physics Uspekhi* vol. 19, nro 1 (1976), s. 94–101.
- [36] Born, M. ja Wolf, E. *Principles of Optics*.  
Pergamon press, 5th ed., 1975, s. 370–414.
- [37] Young, H. D. ja Freedman, R. A. *University Physics*.  
Addison Wesley, 12th ed., 2008, s. 1144–1148.

## A Liite A

Diffraaktiokuvien ja hilavenymien simuloimiseen käytetty MATLAB-koodi.

```

1      clear;
      % tama koodi on myos verkossa osoitteessa
3      % https://pastebin.com/v9Q441SE

5      % mittauslaserin aallonpituus lambda ja tulokulma theta
      lambda = 635E-9;
7      theta = pi/3;

9      % x-suuntaisen venymän suuruus dx ja pystysuuntainen muutos dy (ei
      naissa simulaatioissa)
      % Pulssivaiheen venymat:
11     % dx = 5E-12;
      % dx = 5E-10;
13     % dx = 1E-9;

15     % Tasaantumisvaiheen venymat:
      % dx = 5E-10;
17     % dx = 5E-8;
      dx = 1E-7;
19     dy = 0;

21     %elementin z-suuntainen leveys z_lev ja perusnousukulma alfa_0
      z_lev = 1E-4;
23     alfa_0 = theta;

25     % varjostimen etaisyyys hilasta (hila alkaa x=0, y=0)
      y0 = 0.5;

27     % 0,75 mikrometria
      % N = 427;
29     % d = 0.75E-6;
      % x0 = 7.01E-2;
31

33     % 2,0 mikrometria
      % N = 160;
35     % d = 2E-6;
      % x0 = 2.48E-2;
37

39     % 3,2 mikrometria
      N = 100;
      d = 3.2E-6;
41     x0 = 0.7973E-2;

43     % Hiladiskretointivektori N_vekt, laskuosuuden pituus l ja
      % varjostimen z-koordinaatti z0
45     N_vekt = 1:1:N;
      l = d/6;
47     z0 = 0;

49     % Varjostimen mitat
      kennokoko_x = 5E-3;

```

```

51     tarkkuus_x = 2*kennokoko_x/301;
    x = (x0-(kennokoko_x)):tarkkuus_x:(x0+(kennokoko_x));
53
54     % 3D-simulaatioissa tarpeelliset parametrit
55     % (ei kayteta taman työn simulaatioissa)
    zmax = 1;
57     varjostin_keski = 1;
    tarkkuus_z = 1;
59
60     % Tulosten keruuvektorit
61     xmax = max(size(x));
    E_venymaton = zeros(1,xmax);
63
64     normalisoija = 1;
65
66     % Lasketaan alkuun tapaus, jossa yksikaan hilaelementti ei ole
    venynyt:
67     a = alfa_0;
    dh = d;
69
70     if z0==0
71         % Varjostimen x-koordinaatit lapi:
        for k=1:1:xmax
73             % x0l on laskuissa etaisyyssystermien x-osa, eli
            varjostinpisteen
            % x-koordinaatti (y=vakio y0)
75             x0l = x(k);
76
77             % Varsinainen varjostimen z-koordinaatti koordinaatti z0l
            z0l = 0;
79
80             % summaus hilapalojen (N kpl) vaikutusten yli:
            for n=0:1:(N-1)
                hilasiirre = n*(d+1);
83
84                 valiarvo = exp(-2i*pi*(hilasiirre*((x0l/y0) - sin(theta
                )))/lambda)*(exp(-2i*pi*((x0l/y0) + (sin(theta-a)/cos(a)))*dh/
                lambda) - 1)/((x0l/y0) + (sin(theta-a)/cos(a)));
85
86                 % Summataan hilapalan vaikutus kokokenttaan
87                 % (skaalaus myohemmin)
                E_venymaton(k) = E_venymaton(k)+valiarvo;
89     end
90
91     E_venymaton(k) = E_venymaton(k)*z_lev*exp(1i*pi*(2*y0+x0l*
    x0l+z0l*z0l)/lambda)/(lambda/(y0*lambda*pi));
93
94     % muunnetaan intensiteetiksi
    E_venymaton(k) = abs(E_venymaton(k)).*abs(E_venymaton(k));
95     end
96
97     % Jos z0 != 0, pitaa kukin piste laskea erikseen
    % (tai ei valttamatta tarvitsisi, mutta pitaisi tarkastella mitka
    pisteet pitaa ja mitka ei)

```

```

99     else
100         % Varjostimen x-koordinaatit lapi:
101         for k=1:1:xmax
102             % x0l on laskuissa etaisyyssystermien x-osa, eli kennopisteen
103             % x-koordinaatti (y=vakio y0)
104             x0l = x(k);
105
106             % Varjostimen z-koordinaatit lapi:
107             % Varjostimen z-koordinaatti z0l
108             z0l = 0;
109
110             % summaus hilapalojen (N kpl) vaikutusten yli:
111             for n=0:1:(N-1)
112                 hilasiirre = n*(d+1);
113
114                 valiarvo = exp(-2i*pi*(hilasiirre*((x0l/y0) - sin(theta
115                 )))/lambda)*(exp(-2i*pi*((x0l/y0) + (sin(theta-a)/cos(a)))*dh/
116                 lambda) - 1)/((x0l/y0) + (sin(theta-a)/cos(a)));
117
118                 % Summataan hilapalan vaikutus kokokenttaan
119                 % (skaalaus myohemmin)
120                 E_venymaton(k) = E_venymaton(k)+valiarvo;
121             end
122
123             E_venymaton(k) = E_venymaton(k)*z_lev*exp(1i*pi*(2*y0+x0l*
124             x0l+z0l*z0l)/lambda)/(lambda/(y0*lambda*pi));
125
126             % muunnetaan intensiteetiksi
127             E_venymaton(k) = abs(E_venymaton(k)).*abs(E_venymaton(k));
128         end
129     end
130
131     % -----Venymajakauman tapaus
132
133     % Eri venymaskenaarioiden keruumatriisi:
134     venymakeruu = zeros(N,N);
135
136     % Keruumatriisi intensiteettijakaumille:
137     intensiteetit = zeros(N, xmax);
138     for aalto = 0:1:N-1
139         % Venymajakauman alustus
140         venymat = zeros(1,N);
141         % Yksi elementti kerrallaan venynyt dx verran
142         venymat(aalto+1) = dx;
143
144         % Gaussinen, varahteleva aaltopaketti (kapea versio)
145         venymat = -dx.*exp(-100.*(N_vekt-N+1.2*aalto).*(N_vekt-N+1.2*
146         aalto)/(N*N)).*real(exp(1i*(100/N)*(N_vekt-N-1+1.2*aalto))).*
147         heaviside(N_vekt-N+1.2*aalto);
148
149         % Gaussinen, varahteleva aaltopaketti (levea versio)

```



```

%      venymat = -dx.*exp(-10.*(N_vekt-N+1.9*aalto).*(N_vekt-N+1.9*
aalto)/(N*N)).*real(exp(1i*(15/N)*(N_vekt-N-1+1.9*aalto))).*
heaviside(N_vekt-N+1.9*aalto);
147
% Jatkuva siniaalto
149      venymat = -dx.*exp(-0.5.*(N_vekt-N+2.2*aalto).*(N_vekt-N+2.2*
aalto)/(N*N)).*real(exp(1i*(15/N)*(N_vekt-N-1+2.2*aalto))).*
heaviside(N_vekt-N+2.2*aalto);

151      % Kirjataan kyseinen venymajakauma ylos myohempaa tarkastelua
varten:
      venymakeruu(aalto+1,:) = venymat;
153

      % Venymista aiheutuvat siirtymat hilojen alkupisteille ("
hilasiirteet", nousun juurikohta)
155      % ja pituuden muutoksesta aiheutuvat erot nousukulmiin alfa
      hilasiirteet = zeros(1,N);
157      hilasiirteet(1) = venymat(1);
      alfa = alfa_0.*ones(1,N);
159      alfa(1) = atan((d*tan(alfa_0)+dy)/(d+venymat(1)));
      for ii=2:N
161          % Valopulssin etenemisvaihe:
          %      hilasiirteet(ii) = (ii-1)*(d+l);
163          %      if ii <=(aalto+1)
          %      hilasiirteet(ii) = hilasiirteet(ii)+dx;
165          %      end

          % Tasaantumisaaltojen vaihe:
          hilasiirteet(ii) = sum(venymat(1:(ii-1)))+(ii-1)*(d+l);
167          alfa(ii) = atan((d*tan(alfa_0)+dy)/(d+venymat(ii)));
169      end
      % Pulssivaiheessa tarvitsee muuttaa vain yhden elementin
nousukulmaa
      %      alfa(aalto+1) = atan((d*tan(alfa_0))/(d+dx));
173

175
      % Jos z0=0, voidaan kayttaa symmetriaa ja laskea vain toinen
puoli
177      % varjostimesta (jakauma symmetrinen z=0 suhteen, koska
hilaelementitkin symmetrisia)
      if z0==0
179          E = zeros(1,xmax);

181          % Varjostimen x-koordinaatit lapi:
          for k=1:1:xmax
183              % x0l on varjostinpisteen x-koordinaatti
              x0l = x(k);

185              % Varjostimen z-koordinaatit (puolet) lapi:
              % Varsinainen z-koordinaatti z0l (0 1D-simulaatioissa)
              z0l = 0;
187

189          % summaus hilapalojen (N kpl) vaikutusten yli:

```

```

191         for n=0:(N-1)
193             % Hilaelementin kokonaispituus dh
195             % Pulssin etenemisvaihe:
%           dh = d + venymat(n+1);
197
198             % Tasaantumisaaltovaihe:
199             dh = d+(d/(d+1))*(venymat(n+1));
200             hilasiirre = hilasiirteet(n+1);
201             a = alfa(n+1);
203
204             valiarvo = exp(-2i*pi*(hilasiirre*((x0l/y0) - sin(
theta)))/lambda)*(exp(-2i*pi*((x0l/y0) + (sin(theta-a)/cos(a)))*dh/
lambda) - 1)/((x0l/y0) + (sin(theta-a)/cos(a)));
205
206             % Summataan hilapalan vaikutus kokokenttaan
207             % (skaalaus myohemmin)
208             E(k) = E(k)+valiarvo;
209         end
210
211         E(k) = E(k)*z_lev*exp(1i*pi*(2*y0+x0l*x0l+z0l*z0l)/
lambda)/(lambda/(y0*lambda*pi));
212
213         % muunnetaan intensiteetiksi
214         E(1,k) = abs(E(k)).*abs((E(k)));
215
216         % Kirjataan keruumatriisiin:
217         for xi = 1:xmax
218             intensiteetit(aalto+1,xi) = E(xi);
219         end
220     end
221
222     % Jos z0 != 0, pitaa kukin piste laskea erikseen
223     % (tai ei välttämättä tarvitsisi, mutta pitäisi tarkastella
mitka pisteet taytyy ja mitka ei)
224     else
225         E = zeros(1,xmax);
226
227         % Varjostimen x-koordinaatit lapi:
228         for k=1:1:xmax
229             % x0l on laskuissa etaisyystermien x-osa, eli
kennopisteen
230             % x-koordinaatti (y=vakio y0)
231             x0l = x(k);
232
233             % Varjostimen z-koordinaatit lapi:
234             % Varsinainen koordinaatti z0l (1D-simulaatiossa 0)
235             z0l = 0;
236
237             % summaus hilapalojen (N kpl) vaikutusten yli:
238             for n=0:(N-1)
239                 % Hilaelementin kokonaispituus dh

```

```

241     % Pulssin etenemisvaihe:
        dh = d + venymat(n+1);

243     % Tasaantumisaaltovaihe:
        dh = d+(d/(d+1))*(venymat(n+1));
245     hilasiirre = hilasiirteet(n+1);
        a = alfa(n+1);

247     valiarvo = exp(-2i*pi*(hilasiirre*((x0l/y0) - sin(
theta)))/lambda)*(exp(-2i*pi*((x0l/y0) + (sin(theta-a)/cos(a)))*dh/
lambda) - 1)/((x0l/y0) + (sin(theta-a)/cos(a)));

249     % Summataan hilapalan vaikutus kokokenttaan
251     % (skaalaus myohemmin)
        E(k) = E(k)+valiarvo;

253     end

255     E(k) = E(k)*z_lev*exp(1i*pi*(2*y0+x0l*x0l+z0l*z0l)/
lambda)/(lambda/(y0*lambda*pi));

257     % muunnetaan intensiteetiksi
        E(k) = abs(E(k)).*abs(E(k));

259     % Kirjataan keruumatriisiin:
261     for xi = 1:xmax
        intensiteetit(aalto+1,xi) = E(xi);
263     end

265     end
    % Etenemisen seuraamiseen
267     eteneminen = 100*aalto/N

    end

269     % Animaatiot:
271     minimit = zeros(1,N+1);
        minimit2 = zeros(1,N+1);

273     normalisoija = 1/max(max(E_venymaton));
275     zlims = [0,110];
        zlims2 = [-0.01, 0.013];
277     ylims = [-1.1*dx, 1.1*dx];
        clims = zlims;

279     fig = figure(1);
281     set(fig, 'units', 'normalized', 'outerposition', [0 0 1 1]);
        subplot(2,2,1)
283     plot((100.*x), 100*normalisoija.*E_venymaton(1,:), 'b', 'LineWidth',
1.2);ylim([-1, 101]);xlim(100.*[min(x), max(x)]);xlabel('x cm');
ylabel('Intensiteetti / A.U. ');title({'Intensiteettijakauma
varjostimella'});
        subplot(2,2,2);
285     plot(N_vekt, venymakeruu(1,:), 'b', 'LineWidth', 1.2);axis('tight');
xlabel('Hilaelementti');ylabel('Venyma x-suunnassa / m');ylim(ylims);

```

```

subplot(2,2,3)
287 plot((100.*x), zeros(1, xmax), 'b', 'LineWidth', 1.2); ylim([-1.5,
1.5]); xlim(100.*[min(x),max(x)]); xlabel('x cm'); ylabel('Muutos /
pros. alkup. maksimista'); title({'Intensiteettimuutos
alkuperaisesta'});
subplot(2,2,4)
289 pl3 = animatedline('Color','b','LineWidth',1.2); title('
Intensiteettimuutos (integroitu) ajan (venymaaallon vaiheen)
funktiona'); xlabel('Aallon vaihe / elementtinumero'); ylabel('
Intensiteettimuutos / pros. ');
pl4 = animatedline('Color','r','LineWidth',1.2); title('
Intensiteettimuutos (integroitu) ajan (venymaaallon vaiheen)
funktiona'); xlabel('Aallon vaihe / elementtinumero'); ylabel('
Intensiteettimuutos / pros. ');
291 axis([0,N, -0.1, 0.1]);
drawnow
293 for ii = 1:N
    % plotataan erotusjakauma prosentteina
295     shot = zeros(zmax,xmax);
    subplot(2,2,1)
297     for n = 1:zmax
        shot(n,:) = intensiteetit(ii,:,n);
299     end
    plot((100.*x), 100*normalisoiija.*(shot(1,:)), 'b', 'LineWidth',
1.2); ylim([-1, 101]); xlim(100.*[min(x),max(x)]); xlabel('x cm');
ylabel('Intensiteetti / pros. alkuperaisesta maksimista'); title({'
Intensiteettijakauma varjostimella'});
301
    % Venymajakauma hilassa
303     subplot(2,2,2)
        plot(N_vekt, venymakeruu(ii,:), 'b', 'LineWidth', 1.2); axis('
tight'); xlabel('Hilaelementti'); ylabel('Venyma x-suunnassa / m');
ylim(ylims); title('x-suuntainen venymajakauma hilassa')
305
        % Muutosprofiili, eli paljonko venyneen tapauksen
intensiteettijakauma
307        % eroaa venymattomasta tapauksesta
        muutos = shot-E_venymaton;
309        subplot(2,2,3)
            plot((100.*x), 100*normalisoiija.*(muutos(1,:)), 'b', 'LineWidth',
1.2); ylim([-1.5, 1.5]); xlim(100.*[min(x),max(x)]); xlabel('x cm');
ylabel('Muutos / pros. alkup. maksimista'); title({'
Intensiteettimuutos alkuperaisesta'});
311
            % Muutoksen huippuarvon seuranta
313            minimit(ii) = 0;
            minimit2(ii) = 0;
315            for n = 1:round((xmax-1)/2)
                minimit(ii) = minimit(ii) + 0.5*(muutos(1,n)+muutos(zmax,n)
+muutos(1,n+1)+muutos(zmax,n+1));
317                minimit2(ii) = minimit2(ii) + 0.5*(muutos(1,round((xmax-1)
/2)+n-1)+muutos(zmax,round((xmax-1)/2)+n-1)+muutos(1,round((xmax-1)
/2)+n)+muutos(zmax,round((xmax-1)/2)+n));
                for m = 1:1

```

```

319         minimit(ii) = minimit(ii) + muutos(m,n)+muutos(m,n+1);
        minimit2(ii) = minimit2(ii) + muutos(m,round((xmax-1)
/2)+n-1)+muutos(m,round((xmax-1)/2)+n);
321     end
    end
323     minimit(1) = 0;
    minimit2(1) = 0;
325     minimit(ii) = minimit(ii)*tarkkuus_x*tarkkuus_z*0.5*1E5;
    minimit2(ii) = minimit2(ii)*tarkkuus_x*tarkkuus_z*0.5*1E5;
327     subplot(2,2,4)
        addpoints(pl3,ii,minimit(ii));title('Intensiteettimuutos (
integroituu) ajan (venymaaallon vaiheen) funktiona');xlabel('Aallon
vaihe / elementtinumero');ylabel('Intensiteettimuutos / pros. ');
329     addpoints(pl4,ii,minimit2(ii));title('Intensiteettimuutos (
integroituu) ajan (venymaaallon vaiheen) funktiona');xlabel('Aallon
vaihe / elementtinumero');ylabel('Intensiteettimuutos / pros. ');
        drawnow
331     end

333     figure(2)
        plot([1:1:N],minimit2(1:N),'r',[1:1:N],minimit(1:N),'b','
LineWidth',2.5);xlabel('Venymaaallon vaihe / elementtia');xlim([0,
N]);ylabel('Intensiteettimuutos (integr.) / intensiteettiyksikköä');
        legend({'Oikea puoli (x+)', 'Vasen puoli (x-)' });title(strjoin({'
Intensiteettimuutos varjostimella, puolittain integroituu, d=',
num2str(1E6*d), '\mum'}));

335     % Maksimien paikat (diffraktioyhtälöstä):
337     m = -9:1:9;
    xm1 = 100*y0*tan(asin((6*m*lambda/(7*d))-sin(theta)));
339     xm2 = 100*y0*tan(asin((6*m*lambda/(7*d))+sin(theta)));
        figure(3);plot(m,xm1,'bo',m,xm2,'ro');ylim([-50,50]);xlabel('
Maksimin indeksi');ylabel('Maksimin x-koordinaatti varjostimella');

341     figure(4);plot(100.*x,100*normalisoiija*(E_venymaton-intensiteetit(
round(0.05*N),:)), 'm',100.*x,100*normalisoiija*(E_venymaton-
intensiteetit(round(0.5*N),:)), 'r',100.*x,100*normalisoiija*(
E_venymaton-intensiteetit(round(0.95*N),:)), 'b', 'LineWidth',2.5);
    xlim(100.*[min(x),max(x)]);ylim([-0.4,0.4]);legend({'Venymavaihe:
5 %', 'Venymavaihe: 50 %', 'Venymavaihe: 95 %'}, 'FontSize',18);
    title(strjoin({'Intensiteettimuutosjakaumat eri venymavaiheissa, d=
num2str(1E6*d) '\mum, venyma num2str(1E9*dx) 'mm'}), 'FontSize',
,20);xlabel('x / cm', 'FontSize',18);ylabel('Intensiteettimuutos /
pros.maksimista', 'FontSize',18);

343     figure(5);kaikkiven = zeros(N,max(size(x)));for n=1:N;kaikkiven(n
,:) = E_venymaton(:);end;surf(x,[1:1:N],100*normalisoiija.*(
intensiteetit-kaikkiven));xlabel('x / cm');ylabel('Aika / venyneita
');zlabel('Muutos alkuperäisestä / pros. ');
        figure(6);plot((100.*x),100*normalisoiija.*E_venymaton(1,:), 'b', '
LineWidth',2);ylim([-1,101]);xlim(100.*[min(x),max(x)]);xlabel('x
cm', 'FontSize',18);ylabel('Intensiteetti / A.U.', 'FontSize',18);
    title(strjoin({'Intensiteettijakauma varjostimella, d=', num2str(1
E6*d), '\mum'}), 'FontSize',20);

```

345

```

figure(7);plot(100.*x, (E_venymaton-intensiteetit(round(0.05*N),:))
,'m', 100.*x, (E_venymaton-intensiteetit(round(N/2),:)),'r', 100.*x
, (E_venymaton-intensiteetit(round(0.95*N),:)),'b', 'LineWidth',2);
xlim(100.*[min(x), max(x)]);ylim([-1E-3, 1E-3]);legend({'
Venymavaihe: 5 %', 'Venymavaihe: 50 %', 'Venymavaihe: 95 %'},
'FontSize',18);title(strjoin({'Intensiteettimuutosjakaumat eri
venymavaiheissa', d=' num2str(1E6*d) '\mum, venyma ' num2str(1E9*dx)
'mm'}),'FontSize',20);xlabel('x / cm','FontSize',18);ylabel('
Intensiteettimuutos / intensiteettiyksikkö','FontSize',18);

```